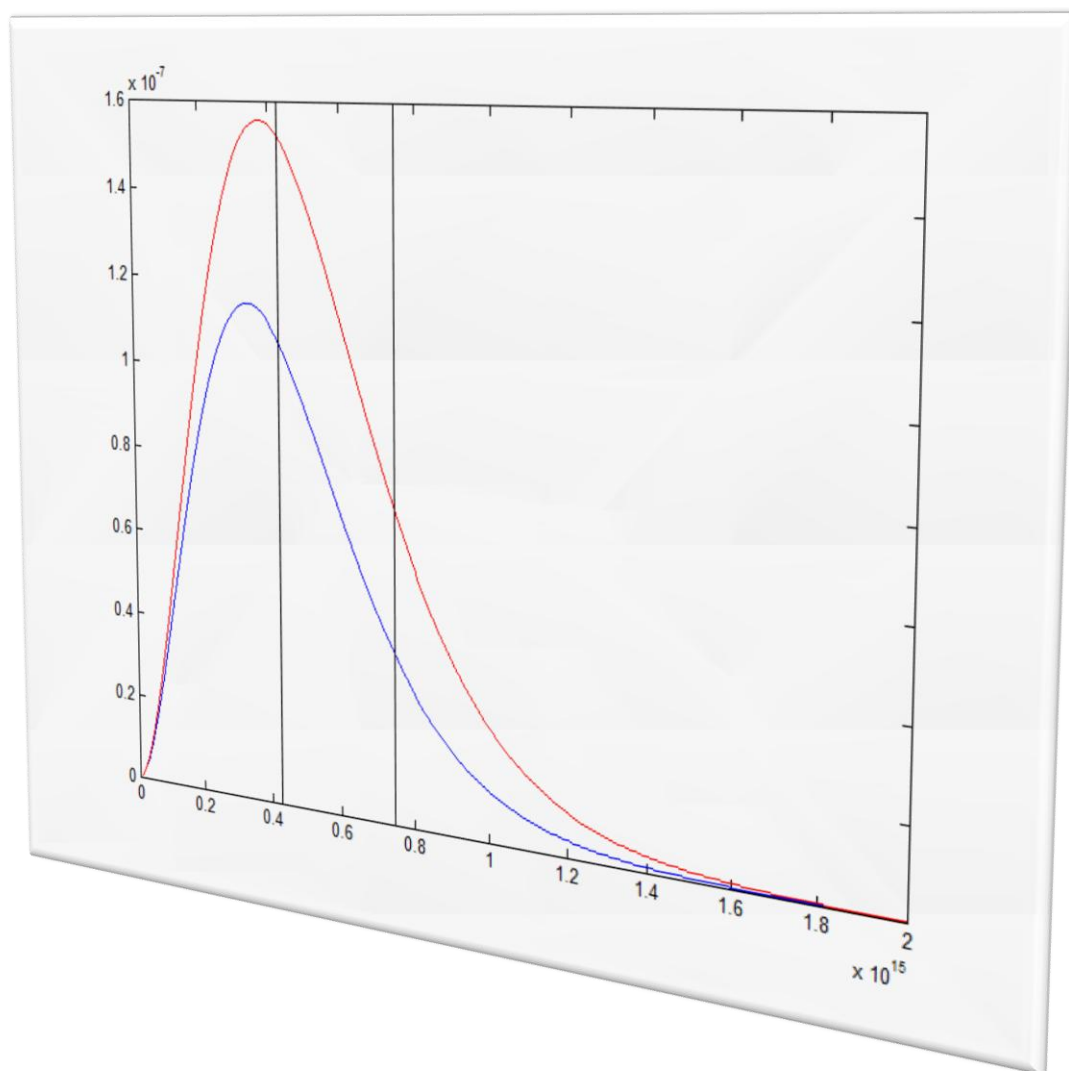


Wiens förskjutningslag: hur "snäll" är solen?



Wiens förskjutningslag: hur ”snäll” är solen?

Plancks strålningslag och Stefan–Boltzmanns lag

Med hjälp av statistisk fysik och kvantmekanik kan man visa att den totala emittansen (utstrålad effekt per ytenhet; dimension: W/m^2) hos en ideal svartkropp med den absoluta temperaturen T är lika med (1)

$$M(T) = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_b T} - 1} d\nu$$

där integrationen sker över samtliga frekvenser ν . Detta samband går under namnet Plancks strålningslag; h är Plancks konstant, c är ljusfarten i vakuum och k_b är Boltzmanns konstant. Vi skriver om integralen enligt

$$M(T) = \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \left(\frac{k_b T}{h}\right)^3 \int_0^\infty \frac{\left(\frac{h}{k_b T}\right)^3 \nu^3}{e^{\frac{h}{k_b T} \nu} - 1} d\nu = \left| \begin{array}{l} x = \frac{h}{k_b T} \nu \\ d\nu = \frac{k_b T}{h} dx \end{array} \right| = \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \left(\frac{k_b T}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

varafter vi kan använda det välkända resultatet

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

för att erhålla

$$M(T) = \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \left(\frac{k_b T}{h}\right)^4 \cdot \frac{\pi^4}{15} = \frac{2\pi^5 k_b^4}{15c^2 h^3} T^4.$$

Med

$$\sigma \equiv \frac{2\pi^5 k_b^4}{15c^2 h^3}, \quad [\sigma] = \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$$

har vi således visat Stefan–Boltzmanns lag

$$M(T) = \sigma T^4;$$

en svartkropp med temperaturen T och total area A strålar således med effekten

$$P = A\sigma T^4.$$

Integralen (1) kan skrivas

$$M(T) = \int_0^\infty M_\nu(\nu) d\nu$$

där integranden¹

¹ Egentligen borde vi skriva $M_\nu(T, \nu)$, men vi tillåter oss att underförstå T -beroendet.

Wiens förskjutningslag: hur "snäll" är solen?

$$M_\nu(\nu) \equiv \frac{2\pi h \nu^3}{c^2 (e^{h\nu/k_b T} - 1)}$$

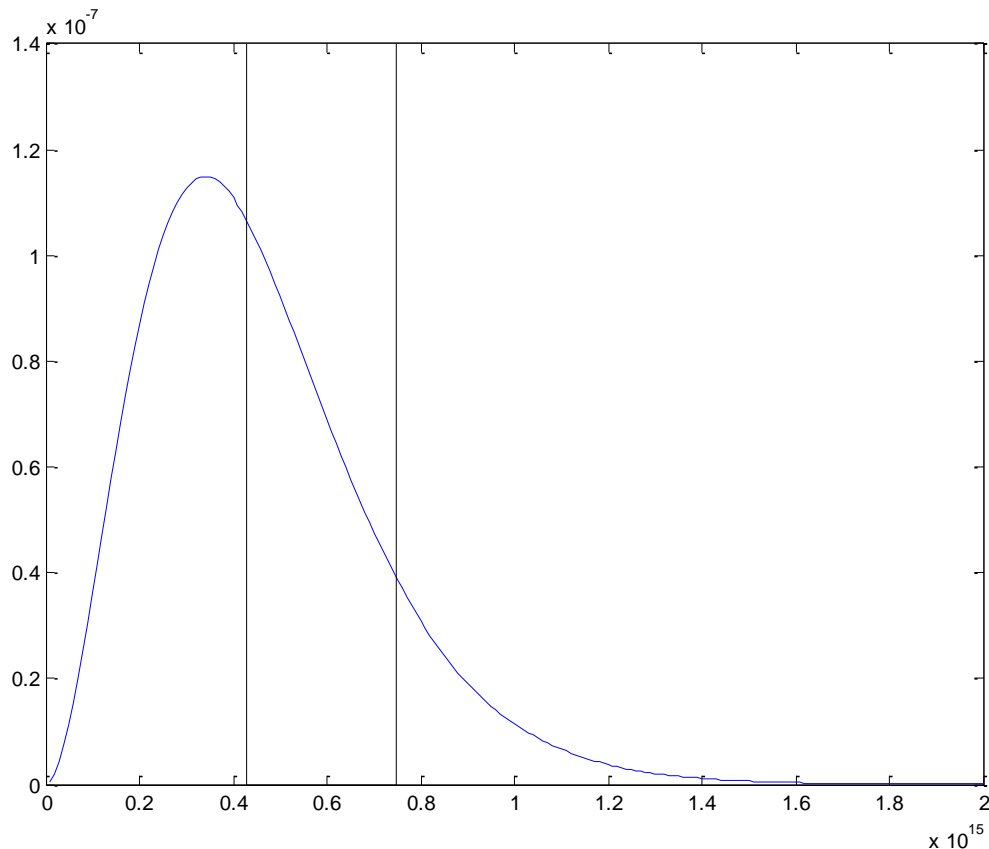
rent formellt tolkas som *emittansen per frekvensenhet*;

$$\int_{\nu_0}^{\nu_0 + \Delta\nu} M_\nu(\nu) d\nu$$

är följaktligen den totala emittansen av strålning med frekvenser i intervallet $[\nu_0, \nu_0 + \Delta\nu]$.

Integranden i Plancks strålningslag. Wiens förskjutningslag

Om man ritar grafen till funktionen M_ν när temperaturen $T = 5800$ K är solens ytemperatur ser man att denna har ett maximum i det infraröda området. Det synliga området ligger i det markerade intervallet.



Figur 1 Emittans per frekvensenhet

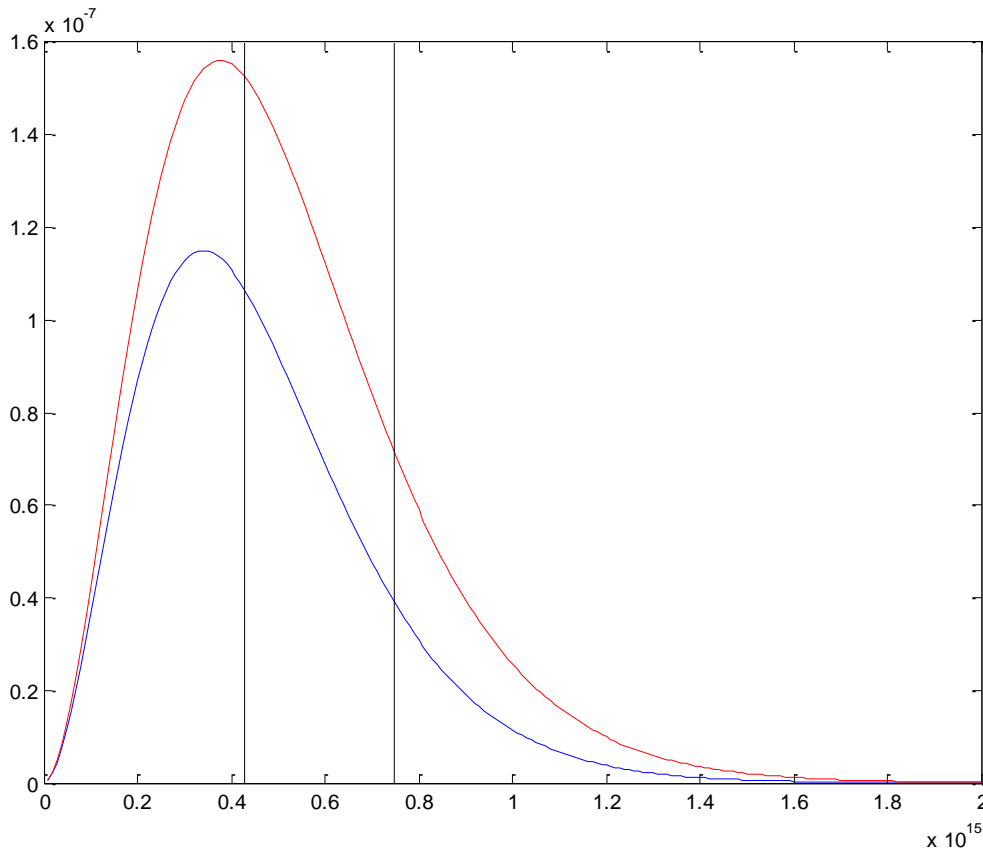
Vi ser alltså att den formella storheten *emittans per frekvensenhet* är högst för infrarött ljus. Om vi ökar temperaturen T kommer vi dels att få ett större värde på integralen (högre emittans totalt sett), och dels kommer maximivärdet av M_ν att förskjutas mot högre frekvenser.

Man kan visa Wiens förskjutningslag, som säger att toppfrekvensen

Wiens förskjutningslag: hur "snäll" är solen?

$$\nu_{max} \propto T.$$

T.ex. för temperaturen $T' = 6400$ K erhåller vi följande graf (röd):



Figur 2 Emmittans per frekvensenhet vid olika temperaturer

I integralen (1) summerar vi emittansen från varje typ av elektromagnetisk strålning i det elektromagnetiska spektret, och vi använder frekvensen ν som koordinat i spektret. Vi kan enkelt skriva om integralen så att vi i stället integrerar över våglängden $\lambda = c/\nu$, som också är en vanlig koordinat i spektret. Vi skriver om integralen enligt

$$\begin{aligned} M(T) &= \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_b T} - 1} d\nu = \left. \begin{array}{l} \nu = c/\lambda \\ d\nu = -c/\lambda^2 d\lambda \\ \lambda \rightarrow \infty \Leftrightarrow \nu \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow 0 \Leftrightarrow \nu \rightarrow \infty \end{array} \right| = \\ &= \frac{2\pi h}{c^2} \int_\infty^0 \frac{c^3}{\lambda^3 (e^{hc/k_b T \lambda} - 1)} \cdot \left(-\frac{c}{\lambda^2}\right) d\lambda = 2\pi h c^2 \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^5 (e^{hc/k_b T \lambda} - 1)} d\lambda. \end{aligned}$$

Vi har följaktligen att

$$M(T) = \int_0^\infty M_\nu(\nu) d\nu = \int_0^\infty M_\lambda(\lambda) d\lambda$$

där

Wiens förskjutningslag: hur ”snäll” är solen?

$$M_\lambda(\lambda) \equiv \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/k_b T \lambda} - 1)}$$

formellt tolkas som *emittans per våglängdsenhet*. Självklart har integralen över våglängder samma värde som integralen över frekvenser – vi har ju bara utfört ett strikt matematiskt variabelbyte, och rent fysikaliskt svarar de fortfarande mot samma storhet: den totala emittansen från svartkroppen (t.ex. solen).

Låt oss studera ett numeriskt exempel, genom att för solen ($T = 5800$ K) beräkna emittansen i våglängdsintervallet $I_\lambda = [590 \text{ nm}, 600 \text{ nm}]$, som i princip svarar mot gult ljus. Vi använder oss av numerisk integration över intervallet, samt kontrollerar sedan att vi erhåller samma totala emittans när vi i stället integrerar med frekvensen som koordinat. Våglängdsintervallet I_λ svarar mot frekvensintervallet $I_\nu = [500 \text{ THz}, 508 \text{ THz}]$. Vi erhåller

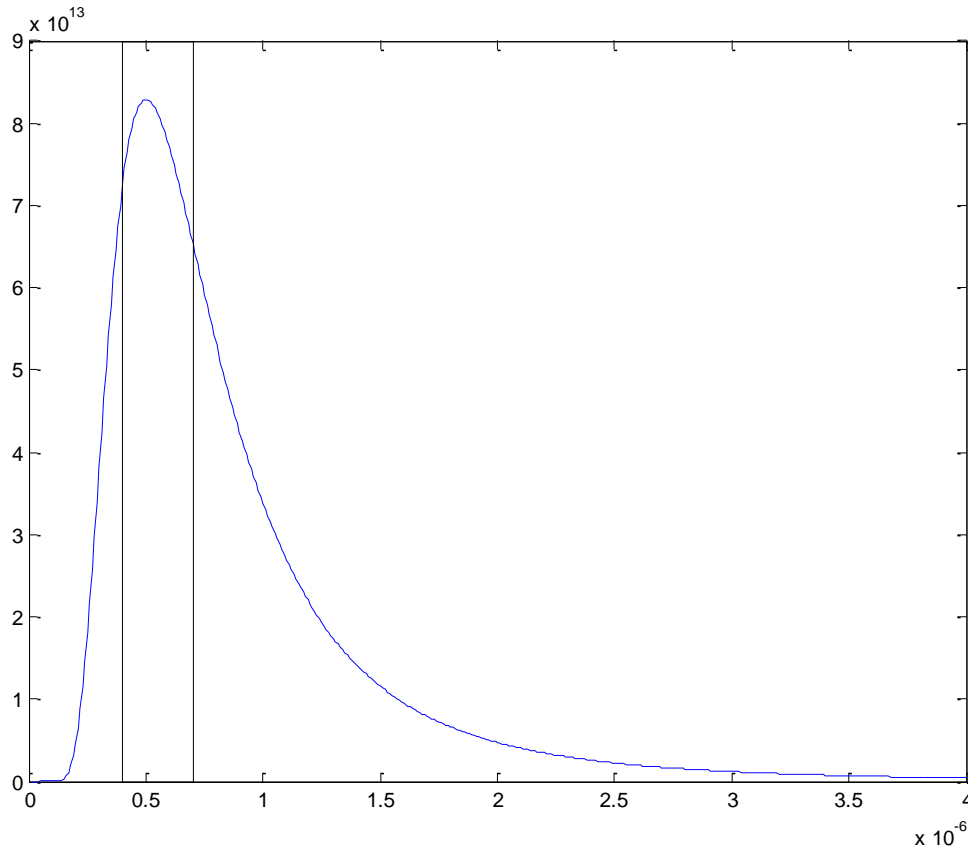
$$\int_{I_\lambda} M_\lambda(\lambda) d\lambda \approx 776 \text{ kW/m}^2$$

respektive

$$\int_{I_\nu} M_\nu(\nu) d\nu \approx 776 \text{ kW/m}^2$$

och allt är i sin ordning.

Låt oss nu studera storheten $M_\lambda(\lambda)$ på samma sätt som vi tidigare studerade $M_\nu(\nu)$. Om vi ritar grafen till M_λ för $T = 5800$ K ser vi att funktionen *emittans per våglängdsenhet* har ett maximum – inte vid infrarött ljus som för M_ν – utan mitt i det synliga området.



Figur 3 Emittans per våglängdsenhet

En tydligen inte alls ovanlig missuppfattning är att denna graf visar att solen emitterar "mest" ljus i det för människor synliga området av spektret, men som vi sett är detta inte alls en nödvändig implikation av det faktum att *emittansen per våglängdsenhet* råkar vara högst i det intervallet; den fullt lika rimliga storheten *emittans per frekvensenhet* har ju sitt maximum utanför det synliga området.

Läget för maximipunkterna hos de funktioner som integreras över spektret för att ge den totala emittansen beror således inte enbart på svartkroppen i sig (på temperaturen), utan även på valet av den koordinat vi väljer att använda för de olika positionerna i spektret.

Förklaring

Det faktum att vi får olika lägen för topparna beroende på om vi beräknar emittans per frekvensenhet eller våglängdsenhet beror på att koordinaterna frekvens och våglängd inte är proportionella mot varandra.

Låt oss visa att två koordinater som är proportionella mot varandra ger samma form på kurvorna, genom att införa en ny koordinat proportionell mot våglängden; låt oss sätta $\Lambda = a\lambda$ där $a > 0$. Vi låter $[a] = \text{UNT} \cdot \text{m}^{-1}$ så att vår nya storhet (koordinat) får enheten "UNT". Vi kan då finna vår motsvarande integrand $M_\Lambda(\Lambda)$:

Wiens förskjutningslag: hur ”snäll” är solen?

$$M(T) = \int_0^{\infty} M_{\lambda}(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/k_b T \lambda} - 1)} d\lambda = \left| \begin{array}{l} \lambda = a^{-1}\Lambda \\ d\lambda = a^{-1}d\Lambda \end{array} \right| = \\ = \int_0^{\infty} \frac{2\pi hc^2 a^4}{\Lambda^5 (e^{ahc/k_b T \Lambda} - 1)} d\Lambda = \int_0^{\infty} M_{\Lambda}(\Lambda) d\Lambda$$

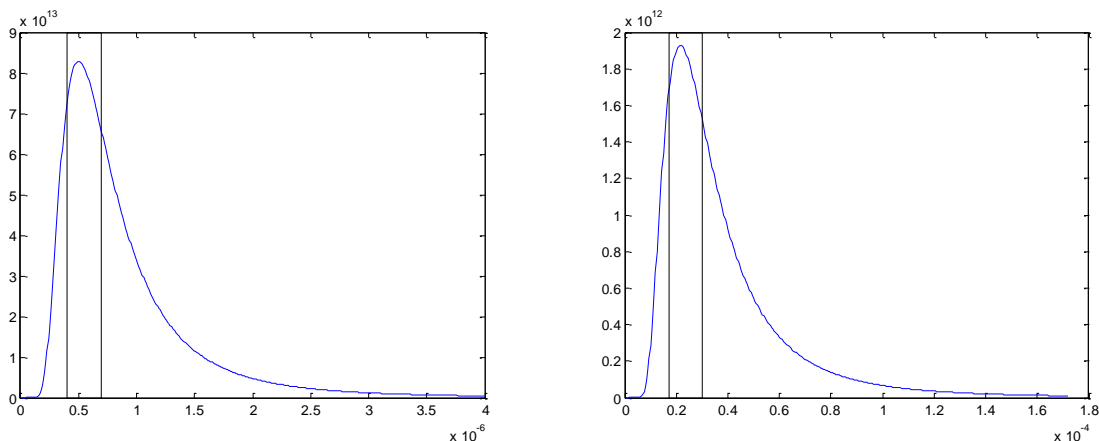
där (2)

$$M_{\Lambda}(\Lambda) \equiv \frac{2\pi hc^2 a^4}{\Lambda^5 (e^{ahc/k_b T \Lambda} - 1)} = a^{-1} \cdot M_{\lambda}(a^{-1}\Lambda) = a^{-1} \cdot M_{\lambda}(\lambda).$$

Faktorn a^{-1} gör att vår nya graf (till M_{Λ}) skalas i höjdlid jämfört med grafen till M_{λ} , men detta ändrar inte grafens *form*.

Att vi erhåller denna skalning är mycket rimligt; med $\Lambda = a\lambda$ har vi ju att vår nya Λ -skala är a gånger så tät som λ -skalan. (Om t.ex. $a = 100$ finns ju 100 UNT-enheter mellan varje meter i λ -skalan.) Detta medför givetvis att storheten *emittans per (dividerat med) Λ* i varje punkt blir $1/a$ (t.ex. en hundraedel) av motsvarande punkt på grafen *emittans per (dividerat med) λ* . Arean under kurvan måste ju bli densamma i båda graferna. Det bör också understrykas hur ekvation (2) skall tolkas: om vi ritar upp graferna till M_{Λ} och M_{λ} över samma intervall i det elektromagnetiska spektret ($\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ samt $\Lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$ där $\Lambda_1 = a\lambda_1$ och $\Lambda_2 = a\lambda_2$) men låter emittansskalan (den lodräta axelskalan) för M_{Λ} bara gå upp till $1/a$ av motsvarande skala för M_{λ} och lägger dessa grafer på varandra, så kommer de precis att sammanfalla. Det är precis vad (2) säger – formen på graferna ändras inte! Speciellt betyder det att positionen för ett eventuellt maximum inte ändras.

Vi ritar upp våra två integrander för $a = 43$ i intervallet $I_{\lambda} = [0 \mu\text{m}, 4 \mu\text{m}]$ som svarar mot $I_{\Lambda} = [0 \mu\text{U}, 172 \mu\text{U}]$.



Figur 4 Emittans per våglängd samt emittans per ”UNT”

Vi ser att maximipunkterna är $\lambda = 510 \text{ nm}$ samt $\Lambda = 22 \mu\text{U}$, och dessa koordinater anger precis samma typ av strålning, ty $\Lambda = a\lambda = 22 \mu\text{U}$! Vi ser ju också i graferna att vi erhåller maximum på samma plats i det synliga spektret.

Men denna likhet gäller tydligen i allmänhet inte mellan koordinater som inte är proportionella mot varandra, såsom fallet är för de bekanta storheterna frekvens och våglängd (medan

Wiens förskjutningslag: hur ”snäll” är solen?

$\Lambda = a\lambda$ beskriver en proportionalitet – en rät linje genom origo, så beskriver $\lambda = c/\nu$ en hyperbel). Betrakta EM-spektrat nedan.



Figur 5 Ett EM-spektrum

Spektrat visar $\lambda \in [100 \text{ nm}, 1000 \text{ nm}]$, och λ -skalan är linjär; var 100:e nanometer markeras med ett grått streck. Spektrat visar frekvenserna $\nu \in [0,3 \text{ EHz}, 3 \text{ EHz}]$, och markerar en frekvensposition per 0,2 EHz med blåa streck. Uppenbarligen är ν -skalan inte linjär! Om vi å andra sidan hade utgått från en linjär frekvensskala, hade våglängdsskalan i samma diagram blivit olinjär. Redan här inser vi att formerna på de två integranderna inte kommer att vara lika. Vi vet ju att en given skillnad (faktor) i täthet mellan två skalor i spektrat ger upphov till en given höjdskalning (med samma faktor), och i spektrat ovan ser vi att skillnaden mellan våglängds- och frekvensskalornas täthet varierar längs spektrat; följaktligen kommer skalningen i höjddled mellan graferna av integranderna också att variera, och formen på den ena grafen kommer att skilja från formen på den andra. Låt oss emellertid visa detta något mer stringent.

Antag nu att vi har en viss emittans M i ett litet våglängdsintervall $[\lambda_0, \lambda_0 + \epsilon]$. Intervallet är så litet att respektive integrand kan betraktas som konstant i det. Det betyder att

$$M = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + \epsilon} M_\lambda(\lambda) d\lambda = \epsilon M_\lambda(\lambda_0)$$

samt att

$$M = \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \epsilon'} M_\nu(\nu) d\nu = \epsilon' M_\nu(\nu_0)$$

där

$$\epsilon' = \frac{c}{\lambda_0} - \frac{c}{\lambda_0 + \epsilon} = \frac{\epsilon c}{\lambda_0^2 + \lambda_0 \epsilon}$$

är längden på det motsvarande frekvensintervallet. Notera att λ_0 och $\nu_0 = c/\lambda_0$ svarar mot samma punkt i spektrat.

Vi har alltså

$$\frac{M_\lambda(\lambda_0)}{M_\nu(\nu_0)} = \frac{\epsilon'}{\epsilon}$$

för en godtycklig punkt i spektrat. Detta samband är jämförbart med (2) med a utbytt mot $\frac{\epsilon'}{\epsilon}$.

Men

Wiens förskjutningslag: hur ”snäll” är solen?

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon} = \frac{c}{\lambda_0^2 + \lambda_0 \epsilon}$$

är – till skillnad från a – inte konstant i spektret. Vi får alltså även här en skalning i höjddled, *men skalningen är olika stor för olika punkter i spektret*. Detta gör att formen på grafen ändras när vi byter koordinat. För stora λ är kvoten $M_\lambda(\lambda_0)/M_\nu(\nu_0)$ mindre än för små λ , så $M_\lambda(\lambda_0)$ blir relativt sett större än $M_\nu(\nu_0)$ för små λ , d.v.s. för punkter i spektret åt det ultravioletta hållet, sett från det synliga området. Ett maximum för M_λ bör således vara beläget längre åt det ultravioletta hållet om man jämför med ett maximum för M_ν . Detta är också precis vad vi ser i graferna (1) och (3).²

Storheter för solens ”snällhet”

Vi inser emellertid att det borde finnas någon fysikalisk storhet som anger hur pass ”snäll” solen är, d.v.s. i vilken utsträckning solen emitterar för människan synligt ljus. Låt oss nu försöka finna någon eller några lämpliga mått på denna ”människliga ändamålsenlighet” hos en stjärna (eller svartkropp över huvud taget). För att kunna göra detta antar vi att människan kan uppfatta ljus med våglängder i intervallet $I_S = [400 \text{ nm}, 700 \text{ nm}]$. (Vi säger dock inget om den relativa känsligheten människan har för olika våglängder inom I_S .)

Energi

En rimlig tanke är att ange hur stor andel av den totalt emitterade energin som utgörs av synligt ljus. Vi betecknar denna dimensionslösa storhet, som påminner om en verkningsgrad, $\eta(T)$. Vi inför dessutom beteckningen³

$$M_I(T) \equiv \int_I M_\lambda(\lambda) d\lambda$$

för den totala emittansen i intervallet I . Då gäller

$$\eta(T) = \frac{M_{I_S}(T)}{M_{\mathbb{R}^+}(T)}$$

Men då

$$M_{\mathbb{R}^+}(T) = \sigma T^4$$

erhåller vi

$$\eta(T) = \frac{1}{\sigma T^4} \cdot 2\pi h c^2 \int_{I_S} \frac{1}{\lambda^5 (e^{hc/k_b T \lambda} - 1)} d\lambda = \frac{\xi}{T^4} \int_{I_S} \frac{1}{\lambda^5 (e^{hc/k_b T \lambda} - 1)} d\lambda.$$

där vi infört

² Vi kunde också ha härlett uttrycket för $M_\lambda(\lambda_0)/M_\nu(\nu_0)$ analogt med hur vi härledde $M_\Lambda(\Lambda)/M_\lambda(\lambda)$ i ekvation (2), d.v.s. omedelbart genom variabelbyte i integralen. Vi hade då erhållit kvoten ν_0^2/c , vilket är precis samma resultat som vi fick genom vårt resonemang. Vi ser nämligen att $\epsilon'/\epsilon = c/(\lambda_0^2 + \lambda_0 \epsilon) \rightarrow \nu_0^2/c$ då $\epsilon \rightarrow 0$.

³ Vi kunde naturligtvis lika gärna ha integrerat över frekvenser.

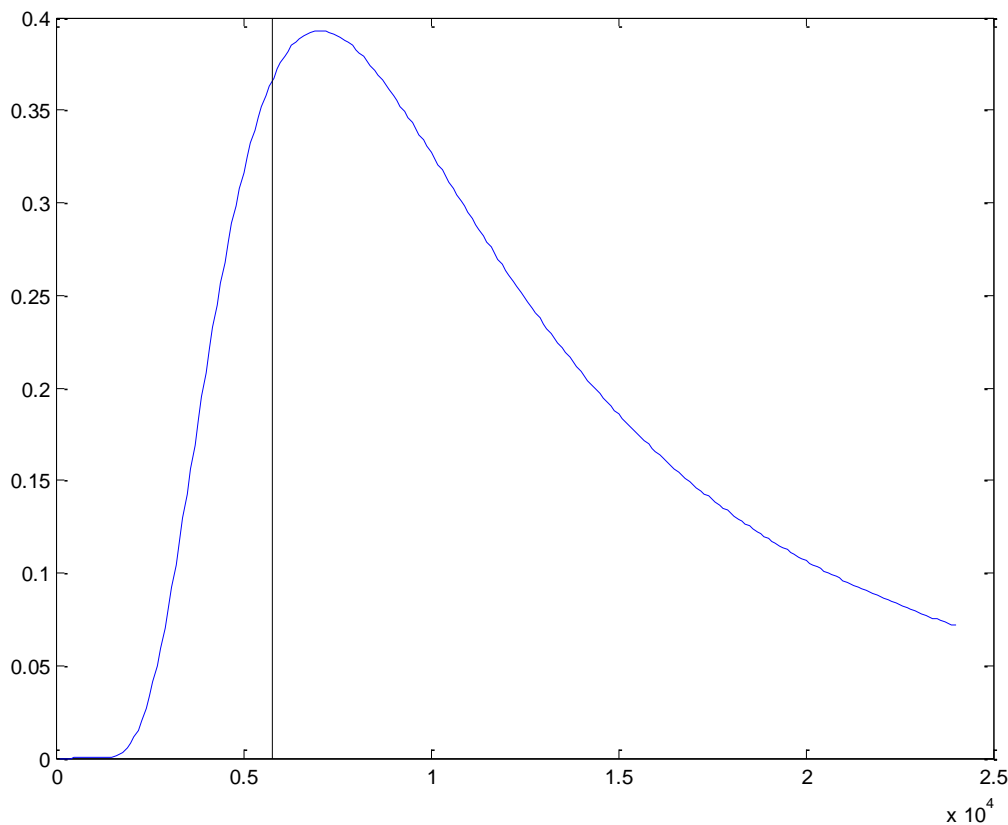
Wiens förskjutningslag: hur ”snäll” är solen?

$$\xi \equiv \frac{2\pi hc^2}{\sigma} = 15 \left(\frac{ch}{k\pi} \right)^4, \quad [\xi] = \text{m}^4\text{K}^4.$$

Vi kan nu beräkna solens ”verkningsgrad”. Vi erhåller numeriskt

$$\eta(T) = 37 \%.$$

Hur pass bra är det? Vi ritar numeriskt upp funktionen η för att se vilken temperatur som ger höst verkningsgrad η , d.v.s. störst *andel* nyttig energi. Det vertikala strecket anger solens temperatur.



Figur 6 Verkningsgrad η mot temperatur T

Vi ser att solen faktiskt har en temperatur nära, närmare bestämt strax under, den temperatur för vilken svartkroppens andel av den emitterade energin som utgörs av för människor synligt ljus är så stor som möjligt. Den optimala temperaturen ligger omkring 7000 K.

Märk emellertid att påståendet ”37 % av *energin* utgörs av synligt ljus” inte implicerar ”37 % av alla *fotoner* är synliga”! Ett alternativt mått på solens ”människa ändamålsenlighet” är följaktligen andelen fotoner som är synliga.

Fotoner

Låt oss därför införa beteckningen $\eta_\gamma(T)$ för denna storhet. Vi vet att emittansen i ett litet våglängdsintervall med längden $d\lambda$ är lika med

$$dM = M_\lambda(\lambda)d\lambda.$$

Wiens förskjutningslag: hur ”snäll” är solen?

Eftersom en foton har energin $E_\gamma = hf = hc/\lambda$ är antalet emitterade fotoner per kvadratmeter och sekund i det aktuella intervallet lika med

$$dN = \frac{M_\lambda(\lambda)}{E_\gamma} d\lambda = \frac{\lambda M_\lambda(\lambda)}{hc} d\lambda.$$

Vi inför nu

$$N_I(T) \equiv \int_I \frac{\lambda M_\lambda(\lambda)}{hc} d\lambda$$

som antalet emitterade fotoner per kvadratmeter och sekund i våglängdsintervallet I .

I analogi med introduktionen av vårt tidigare mått $\eta(T)$ ser vi nu att vi kan skriva

$$\eta_\gamma(T) = \frac{N_{I_S}(T)}{N_{\mathbb{R}^+}(T)} = \int_{I_S} \frac{d\lambda}{\lambda^4 (e^{hc/k_b T \lambda} - 1)} \bigg/ \int_{\mathbb{R}^+} \frac{d\lambda}{\lambda^4 (e^{hc/k_b T \lambda} - 1)}$$

(där vi i sista ledet har förkortat bort gemensamma faktorer i täljare och nämnare, varför dessa två objekt *inte* längre representerar totala antalet fotoner i respektive intervall, utan bara är proportionella mot antalen).

Vi kan enkelt numeriskt beräkna vår dimensionslösa ”fotoneffektivitet” för solen ($T = 5800$ K). Vi erhåller

$$\eta_\gamma(T) = 22 \text{ \%}.$$

Vi kan även med intresse notera att det totala antalet synliga fotoner är

$$N_{I_S}(T) = 6,4 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

Det totala antalet fotoner, oavsett våglängd, är

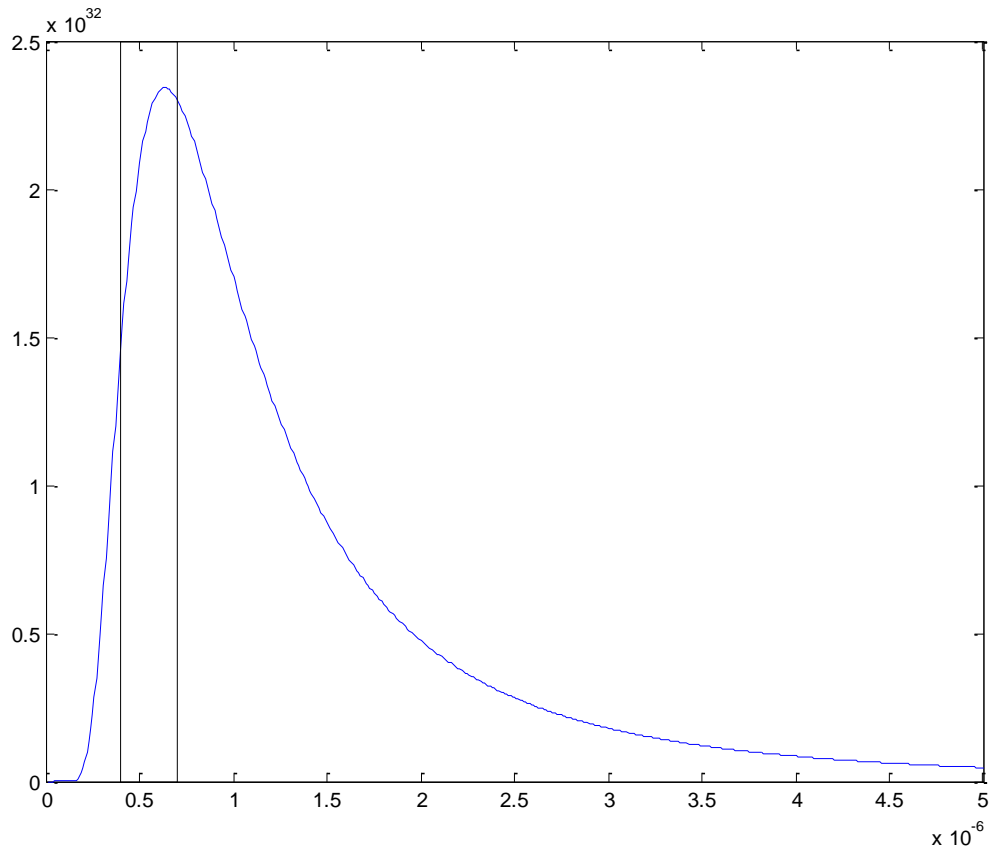
$$N_{\mathbb{R}^+}(T) = 2,9 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

Om vi multiplicerar dessa tal med solens area $A = 4\pi R^2$ erhåller vi det totala antalet emitterade fotoner (i respektive intervall I_S och \mathbb{R}^+) per sekund. Vi erhåller numeriskt

$$\begin{aligned} AN_{I_S}(T) &= 3,9 \cdot 10^{44} \text{ s}^{-1}, \\ AN_{\mathbb{R}^+}(T) &= 1,8 \cdot 10^{45} \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Också av intresse kan det vara att notera att solen producerar många lågenergetiska fotoner; förvisso ger solen inte ifrån sig alltför mycket energi på långa våglängder (se graf 3), men varje foton kräver så pass lite energi att antalet fotoner ändå blir tämligen stort. Detta illustreras i grafen till funktionen $\lambda \mapsto \lambda M_\lambda(\lambda)/hc$ (antalet fotoner per kvadratmeter, sekund och våglängdsenhet) nedan.

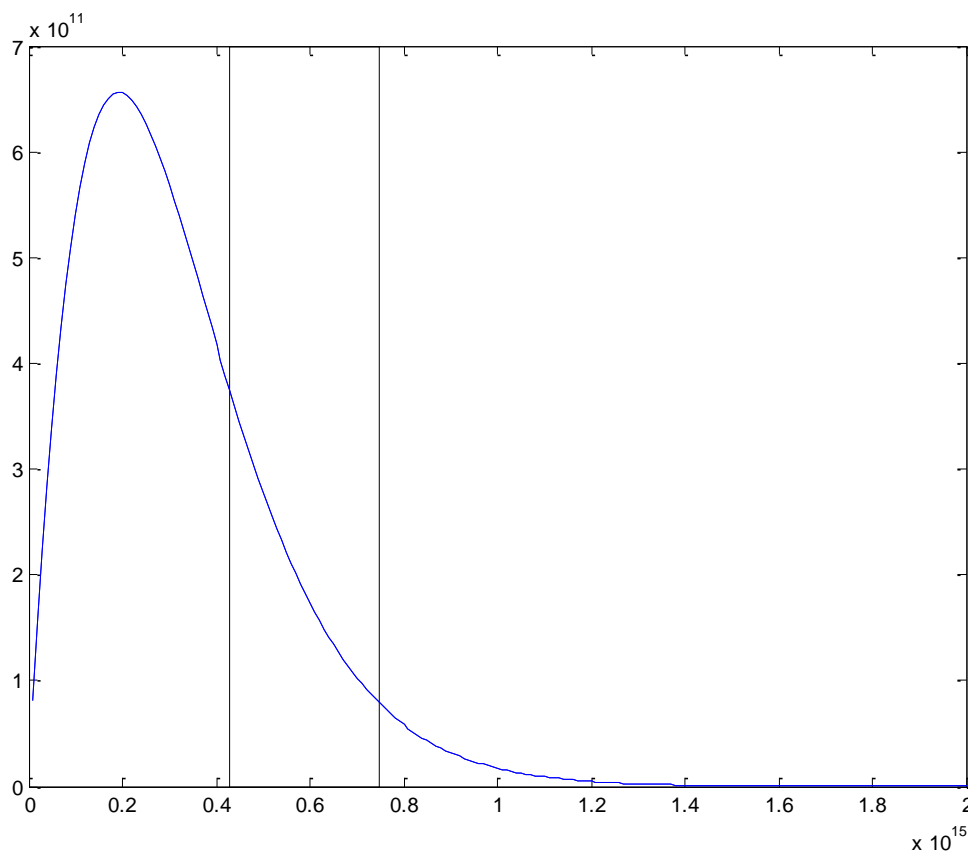
Wiens förskjutningslag: hur ”snäll” är solen?



Figur 7 Fotoner per sekund, kvadratmeter och våglängdsenhet λ

Här syns dessutom att *antalet fotoner per våglängdsenhet* är högst inom det synliga området. För att inte låta oss luras av detta, ritar vi också upp grafen till $\nu \mapsto M_\nu(\nu)/h\nu$ (antalet fotoner per frekvensenhet).

Wiens förskjutningslag: hur ”snäll” är solen?



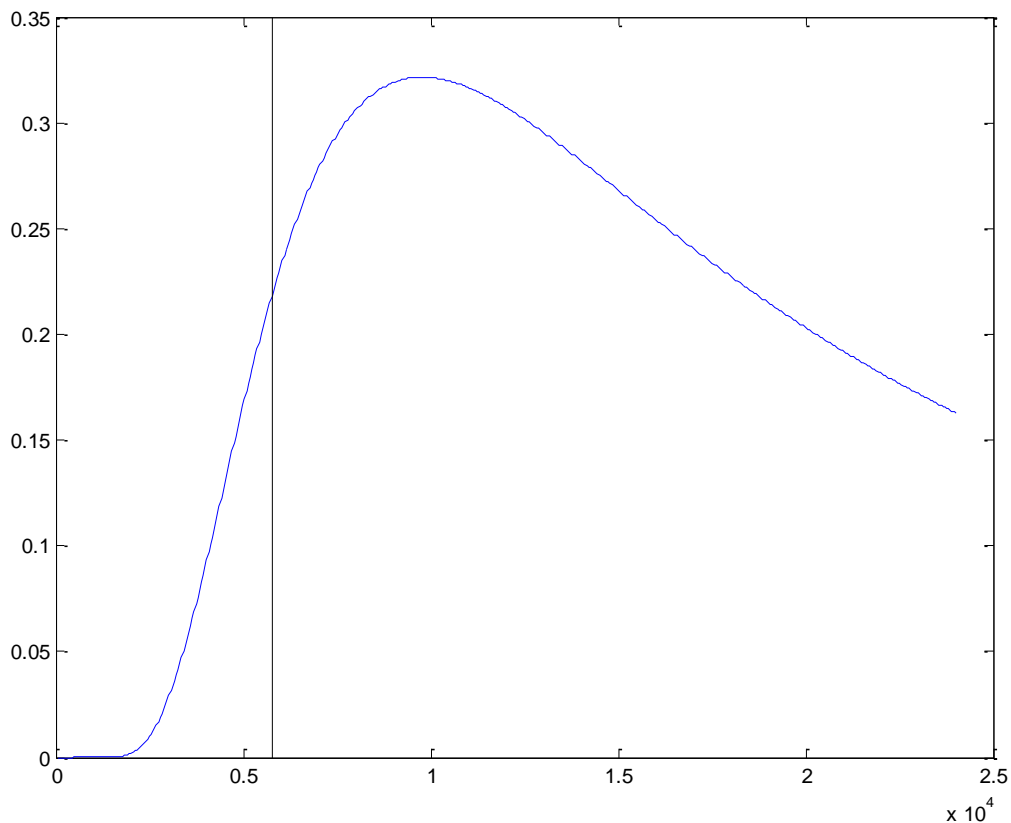
Figur 8 Fotoner per sekund, kvadratmeter och frekvensenhet ν

Här är toppen i det infraröda området. För att förvissa oss om att vi ändå gjort rätt, integrerar vi även med frekvensen fram det totala antalet synliga fotoner. Vi erhåller

$$N_{I_S} = 6,4 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1},$$

vilket stämmer bra.

Hur pass bra är egentligen $\eta_\gamma(T) = 22\%$? För att få en uppfattning om det ritar vi (precis som vi gjorde för η) upp funktionen η_γ och undersöker hur pass nära maximivärdet vi kommer just med temperaturen $T = 5800 \text{ K}$.



Figur 9 Fotonverkningsgrad η_T mot temperatur T

Vi ser att solens temperatur på $T = 5800$ K är lägre än den optimala temperaturen på $T = 9800$ K.

Människans anpassning till den givna solen

Vi kan också ställa oss frågan hur pass väl människan är anpassad till solen. (Även om denna fråga i princip är likvärdig frågan om hur väl solen är anpassad till människan, får vi åtminstone en chans att pröva några nya vägar och introducera några nya storheter.)

Antag att solen har sin nuvarande temperatur, och att människan med nödvändighet bara kan uppfatta strålning inom ett våglängdsintervall av längden $\Delta\lambda = 300$ nm. Som människan nu är konstruerad uppfattar vi strålning i intervallet $I_S = [400 \text{ nm}, 700 \text{ nm}]$, som har den givna bredden. Frågan är om något annat intervall $I_{S'} = [\lambda_0, \lambda_0 + \Delta\lambda]$ med samma längd vore ”bättre” i den meningen att människan då skulle

1. uppfatta en större andel av den totalt emitterade energin, eller
2. uppfatta en större andel av samtliga emitterade fotoner.

Låt oss först studera punkt 1. Vi återvänder till vårt uttryck för solens verkningsgrad:

$$\eta(T) = \frac{M_{I_S}(T)}{M_{\mathbb{R}^+}(T)}$$

Wiens förskjutningslag: hur ”snäll” är solen?

där

$$M_I(T) \equiv \int_I M_\lambda(\lambda) d\lambda.$$

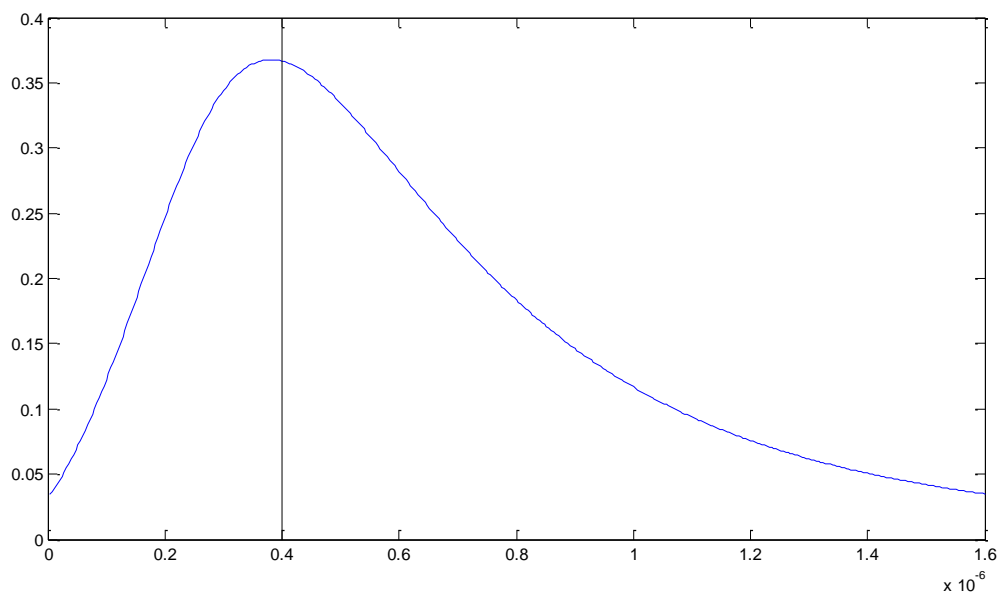
Nu betraktar vi emellertid svartkroppens temperatur T som en konstant, och väljer i stället intervallet I som vår oberoende variabel; närmare bestämt väljer vi intervallets startpunkt. Vi sätter alltså

$$I_{S'}(\lambda_0) = [\lambda_0, \lambda_0 + \Delta\lambda]$$

och

$$\eta(\lambda_0) = \frac{M_{I_{S'}}(T)}{M_{\mathbb{R}^+}(T)} = \frac{\xi}{T^4} \int_{I_{S'}} \frac{1}{\lambda^5 (e^{hc/k_b T \lambda} - 1)} d\lambda.$$

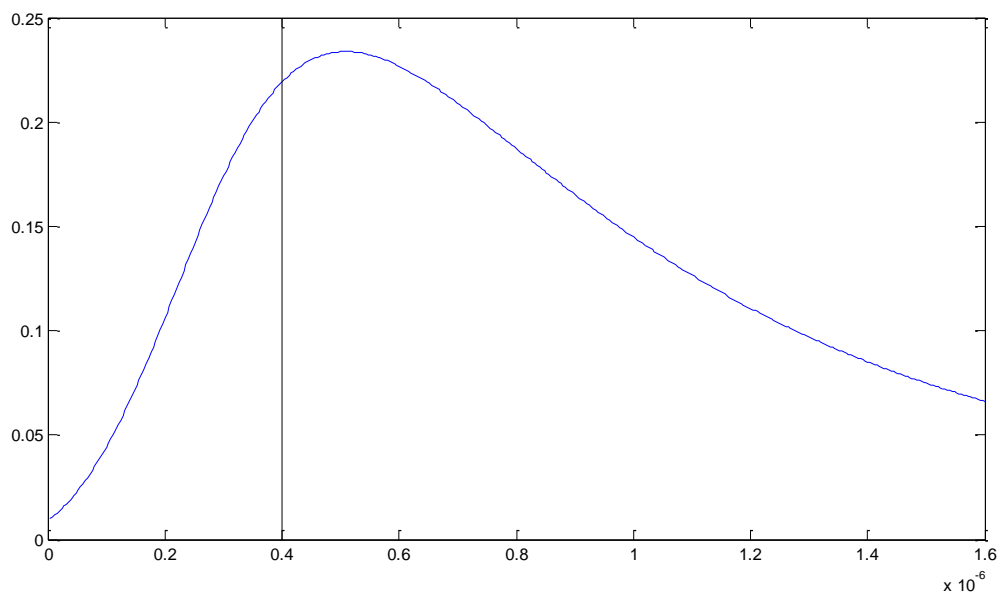
Genom att variera λ_0 får vi olika intervall $I_{S'}$ och olika verkningsgrader. Numeriskt erhåller vi grafen nedan. Vi ser att vi trots allt är tämligen väl anpassade till vår stjärna. I stort sett gäller att *inget annat våglängdsintervall med bredden $\Delta\lambda$ skulle göra oss förmögna att observera en större andel av den emitterade energin.* (Notera att vårt val av $\Delta\lambda$ och λ_0 är approximativa, liksom flera andra antaganden vi gjort, så med våra felmarginaler bör vi nog avstå från att säga ”vi borde nog ändå ha ett lite lägre värde på λ_0 ”.)



Figur 10 Verkningsgrad mot startvåglängd λ_0

Utför vi en analog omarbetning av η_γ erhåller vi följande graf.

Wiens förskjutningslag: hur ”snäll” är solen?



Figur 11 Fotonverkningsgrad mot startvåglängd λ_0

Är det rimligt att antaga att en biologisk organism med nödvändighet endast kan uppfatta ett våglängdsintervall med bestämd bredd? Nej, speciellt inte eftersom storheten ”våglängd” knappast har någon betydelse för sensorn ögat. Det torde snarare vara storheten fotonenergi som är avgörande för om ögat kan nyttja fotonen eller inte. Men även här är det tveksamt om det är en viss *energibredd* i spektret som gärna är konstant; det är nog minst lika rimligt att själva start- och slutenergierna är konstanta. Med andra ord är analyser av typen ”vilken startkoordinat är optimal” mindre relevanta.

Har jag fel?

Många räkningar blir det. Om du finner något fel eller har någon anmärkning eller fråga, är du välkommen att ta kontakt med författaren via e-post: andreas@rejbrand.se.