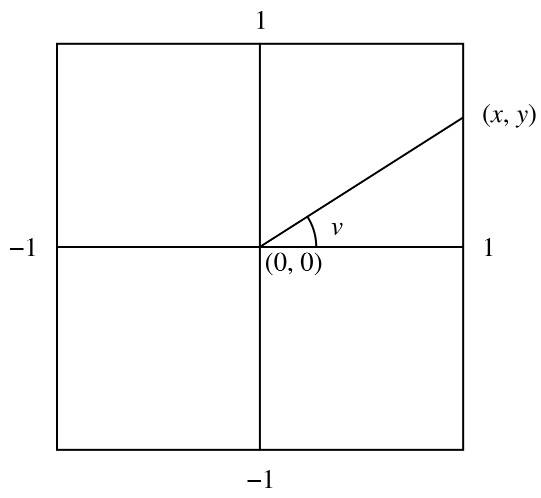
Trigonometriska kvadraticusfunktioner

Problemformulering

Funktionerna sink (sinuskvadraticus) och cosk (cosinuskvadraticus) definieras enligt följande:



$\text{sink}v = y$

$\text{cosk}v = x$

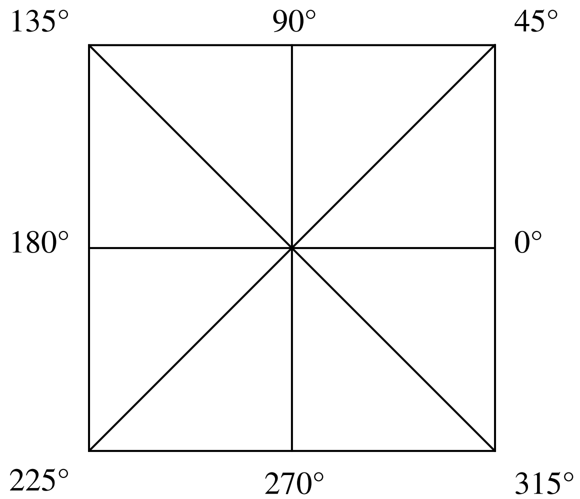
Vi ska finna metoder för beräkning av funktionsvärdena av sink och cosk när vinkeln v är känd samt metoder för ekvationslösning (vilket involverar bestämning av de inversa funktionerna). Vi ska även finna räkneregler för de nya funktionerna.

Beräkningar

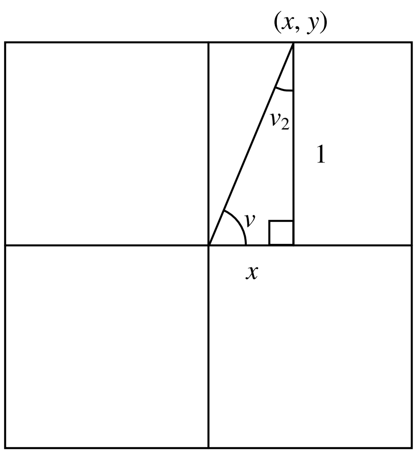
Vi vill bestämma funktionsvärdena av sink och cosk när vinkeln v är känd. Uppenbarligen är funktionerna periodiska med perioden 360° (vi arbetar alltid med grader), varför vi endast behöver ställa upp regler för intervallet $0° \le v \le 360°$. För övriga vinklar v behöver vi då endast lägga till eller ta bort hela perioder så att vi hamnar inom detta intervall. När vi sedan skriver program för beräkning av funktionsvärdena låter sig detta göras automatiskt. Programmeringsfunktionerna blir således definierade för alla reella vinklar v.

Cosinuskvadraticus

Vi vill bestämma värdet av cosk v när vinkeln v är känd. Vi börjar med att studera fallen $0° \le v \le 45°$ samt $315° \le v \le 360°$. Uppenbarligen gäller då att $\text{cosk}v = 1$. För $135° \le v \le 225°$ kan vi likaså konstatera att $\text{cosk}v = -1$.



Låt oss då studera fallet $45° \le v \le 90°$.



Vinkelsumman i en triangel ger att $v_2 = 180° - 90° - v = 90° - v$.

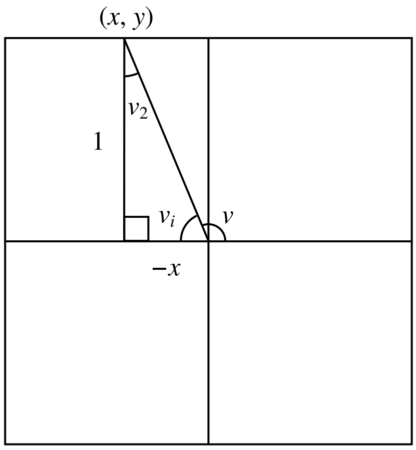
Sinussatsen ger $\dfrac{1}{\sin v} = \dfrac{x}{\sin v_2}$. Insättning av uttrycket för v_2 ger $\dfrac{1}{\sin v} = \dfrac{x}{\sin(90° - v)}$.

Vi löser ut x.

$$x = \frac{\sin(90° - v)}{\sin v} = \frac{\sin 90° \cos v - \cos 90° \sin v}{\sin v} = \frac{\cos v}{\sin v}$$

För $45° \le v \le 90°$ gäller tydligen att $\operatorname{cosk} v = \dfrac{\cos v}{\sin v}$.

Låt oss då studera fallet $90° \le v \le 135°$.



Triangelns bas får längden $-x$ eftersom sträckan måste vara positiv och $x < 0$.

Vi ser att $v_i = 180° - v$ och triangelns vinkelsumma ger att
$v_2 = 90° - v_i = 90° - (180° - v) = v - 90°$.

Sinussatsen ger $\dfrac{1}{\sin v_i} = \dfrac{-x}{\sin v_2}$.

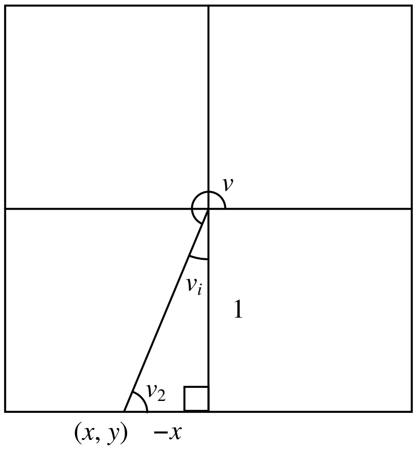
Insättning av uttrycken för v_i och v_2 ger $\dfrac{1}{\sin(180° - v)} = \dfrac{-x}{\sin(v - 90°)}$.

$$-x = \frac{\sin(v - 90°)}{\sin(180° - v)} = \frac{\sin v \cos 90° - \cos v \sin 90°}{\sin 180° \cos v - \cos 180° \sin v} = \frac{-\cos v}{\sin v} = -\frac{\cos v}{\sin v}$$

$$x = \frac{\cos v}{\sin v}$$

Vi får samma uttryck även här, varför $\operatorname{cosk} v = \dfrac{\cos v}{\sin v}$ för alla v sådana att $45° \le v \le 135°$.

Låt oss då studera fallet $225° \le v \le 270°$.



Vi ser att $v_i = 270° - v$ och triangelns vinkelsumma ger att
$v_2 = 90° - v_i = 90° - (270° - v) = v - 180°$.

Sinussatsen ger $\dfrac{1}{\sin v_2} = \dfrac{-x}{\sin v_i}$.

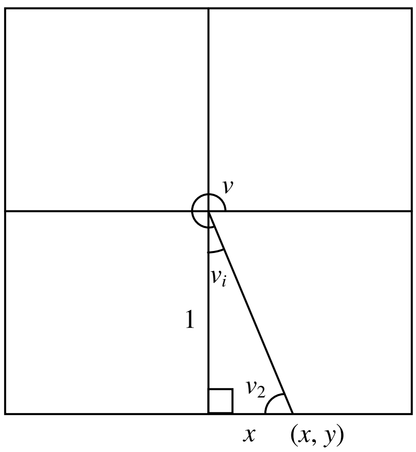
Insättning av uttrycken för v_i samt v_2 ger $\dfrac{1}{\sin(v - 180°)} = \dfrac{-x}{\sin(270° - v)}$.

$$-x = \frac{\sin(270° - v)}{\sin(v - 180°)} = \frac{\sin 270° \cos v - \cos 270° \sin v}{\sin v \cos 180° - \cos v \sin 180°} = \frac{-\cos v}{-\sin v} = \frac{\cos v}{\sin v}$$

$$x = -\frac{\cos v}{\sin v}$$

För $225° \leq v \leq 270°$ gäller tydligen att $\operatorname{cosk} v = -\dfrac{\cos v}{\sin v}$.

Låt oss slutligen studera fallet $270° \leq v \leq 315°$.



Vi ser här att $v_i = v - 270°$ och triangelns vinkelsumma ger att
$v_2 = 90° - v_i = 90° - (v - 270°) = 360° - v$.

Sinussatsen ger $\dfrac{1}{\sin v_2} = \dfrac{x}{\sin v_i}$.

Insättning av uttrycken för v_2 samt v_i ger $\dfrac{1}{\sin(360° - v)} = \dfrac{x}{\sin(v - 270°)}$.

$$x = \frac{\sin(v - 270°)}{\sin(360° - v)} = \frac{\sin v \cos 270° - \cos v \sin 270°}{\sin 360° \cos v - \cos 360° \sin v} = \frac{\cos v}{-\sin v} = -\frac{\cos v}{\sin v}$$

Vi får samma uttryck som i förra fallet, varför $\operatorname{cosk} v = -\dfrac{\cos v}{\sin v}$ för alla v sådana att $225° \leq v \leq 315°$.

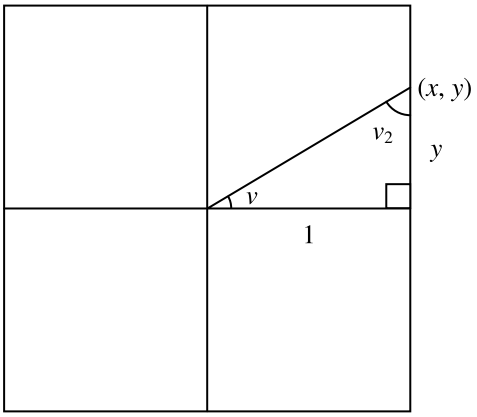
Sammanfattning

Inom en period $0° \leq v \leq 360°$ gäller att

$$\operatorname{cosk} v = \begin{cases} 1 & \text{om } 0° \leq v \leq 45° \text{ eller } 315° \leq v \leq 360° \\ -1 & \text{om } 135° \leq v \leq 225° \\ \cos v / \sin v & \text{om } 45° \leq v \leq 135° \\ -\cos v / \sin v & \text{om } 225° \leq v \leq 315° \end{cases}$$

Sinuskvadraticus

Vi vill nu finna uttryck för beräkning av sinuskvadraticus. Vi börjar med fallet $45° \leq v \leq 135°$ och ser att $\operatorname{sink} v = 1$. För $225° \leq v \leq 315°$ ser vi också att $\operatorname{sink} v = -1$. Låt oss då studera fallet $0° \leq v \leq 45°$.



Triangelns vinkelsumma ger att $v_2 = 90° - v$.

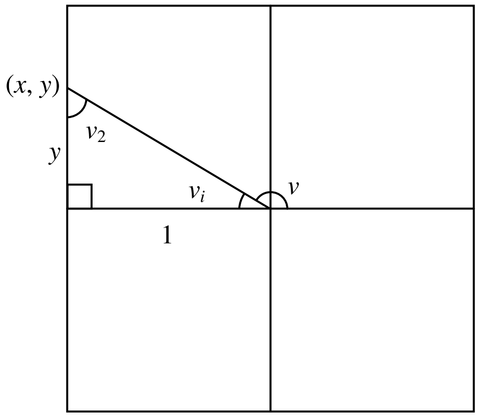
Sinussatsen ger att $\dfrac{1}{\sin v_2} = \dfrac{y}{\sin v}$.

Om vi sätter in uttrycket för v_2 får vi $\dfrac{1}{\sin(90° - v)} = \dfrac{y}{\sin v}$.

$$y = \frac{\sin v}{\sin(90° - v)} = \frac{\sin v}{\sin 90° \cos v - \cos 90° \sin v} = \frac{\sin v}{\cos v} = \tan v$$

Vi ser att $\operatorname{sink} v = \tan v$ för $0° \le v \le 45°$.

Låt oss då studera fallet $135° \le v \le 180°$.



Vi ser att $v_i = 180° - v$ och triangelns vinkelsumma ger att
$v_2 = 90° - v_i = 90° - (180° - v) = v - 90°$.

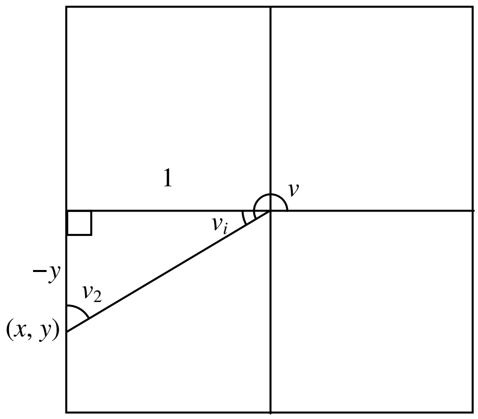
Sinussatsen ger $\dfrac{1}{\sin v_2} = \dfrac{y}{\sin v_i}$.

Om vi sätter in uttrycken för v_i samt v_2 får vi $\dfrac{1}{\sin(v - 90°)} = \dfrac{y}{\sin(180° - v)}$.

$$y = \frac{\sin(180° - v)}{\sin(v - 90°)} = \frac{\sin 180° \cos v - \cos 180° \sin v}{\sin v \cos 90° - \cos v \sin 90°} = \frac{\sin v}{-\cos v} = -\tan v$$

Tydligen är $\operatorname{sink} v = -\tan v$ då $135° \le v \le 180°$.

Låt oss studera fallet $180° \le v \le 225°$.



Vi ser att $v_i = v - 180°$ och triangelns vinkelsumma ger att
$v_2 = 90° - v_i = 90° - (v - 180°) = 270° - v$.

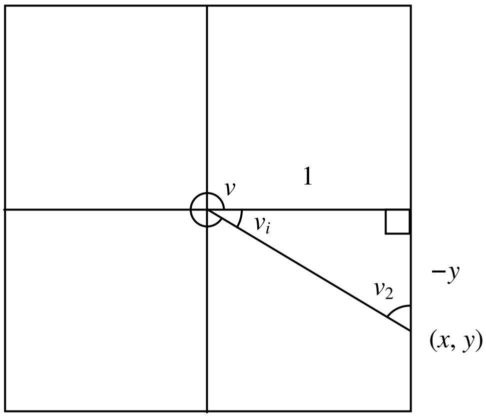
Sinussatsen ger $\dfrac{1}{\sin v_2} = \dfrac{-y}{\sin v_i}$.

Om vi sätter in uttrycken för v_i samt v_2 får vi $\dfrac{1}{\sin(270° - v)} = \dfrac{-y}{\sin(v - 180°)}$.

$$-y = \frac{\sin(v-180°)}{\sin(270° - v)} = \frac{\sin v \cos 180° - \cos v \sin 180°}{\sin 270° \cos v - \cos 270° \sin v} = \frac{-\sin v}{-\cos v} = \frac{\sin v}{\cos v} = \tan v$$
$$y = -\tan v$$

Detta är samma uttryck som vi fick i förra fallet. Tydligen är $\operatorname{sink} v = -\tan v$ då $135° \le v \le 225°$.

Låt oss slutligen studera fallet $315° \le v \le 360°$.



Vi ser att $v_i = 360° - v$ och triangelns vinkelsumma ger att
$v_2 = 90° - v_i = 90° - (360° - v) = v - 270°$.

Sinussatsen ger $\dfrac{1}{\sin v_2} = \dfrac{-y}{\sin v_i}$.

Om vi sätter in uttrycken för v_i samt v_2 får vi $\dfrac{1}{\sin(v - 270°)} = \dfrac{-y}{\sin(360° - v)}$.

$$-y = \frac{\sin(360° - v)}{\sin(v - 270°)} = \frac{\sin 360° \cos v - \cos 360° \sin v}{\sin v \cos 270° - \cos v \sin 270°} = \frac{-\sin v}{\cos v} = -\frac{\sin v}{\cos v} = -\tan v$$
$$y = \tan v$$

Detta är samma uttryck som vi fick för $0° \le v \le 45°$. Vi ser således att $\operatorname{sink} v = \tan v$ för alla v sådana att $0° \le v \le 45°$ eller $315° \le v \le 360°$. (Om vi bortser från kravet att hålla oss inom den första positiva perioden kan vi säga att $\operatorname{sink} v = \tan v$ för $-45° \le v \le 45°$.)

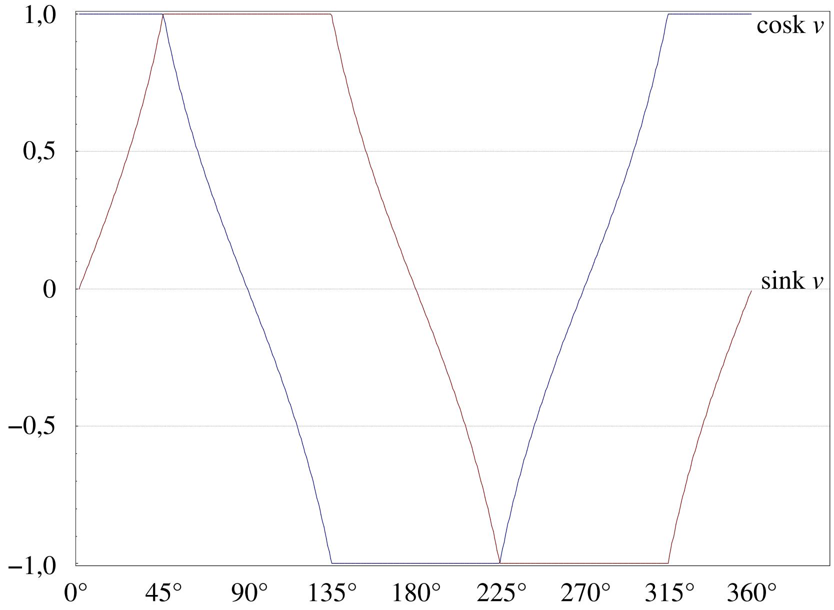
Sammanfattning

Inom en period $0° \le v \le 360°$ gäller att

$$\operatorname{sink} v = \begin{cases} 1 & \text{om } 45° \le v \le 135° \\ -1 & \text{om } 225° \le v \le 315° \\ \tan v & \text{om } 0° \le v \le 45° \text{ eller } 315° \le v \le 360° \\ -\tan v & \text{om } 135° \le v \le 225° \end{cases}$$

Graferna till kvadraticusfunktionerna

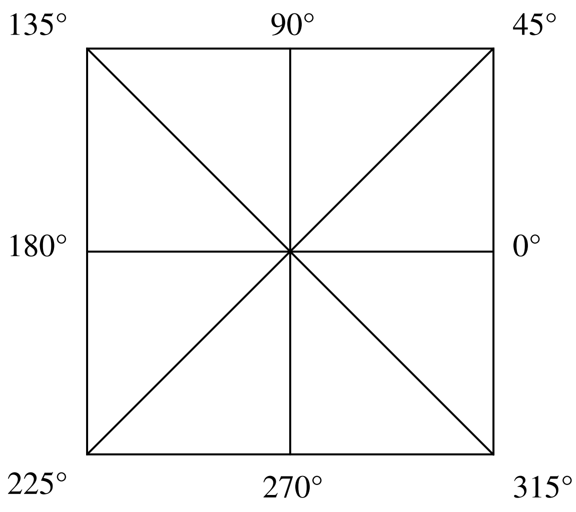
Graferna till kvadraticusfunktionerna följer.



Inversa funktioner och ekvationslösning

Om vi känner funktionsvärdet hos sinuskvadraticus eller cosinuskvadraticus kan vi ta reda på vilka vinklar inom en period som kan ge dessa värden. Vi ska nu ta fram de inversa funktionerna till sinuskvadraticus och cosinuskvadraticus som tar emot värden mellan −1 och 1 och returnerar vinklar mellan 0° och 360°. Vi benämner dessa arcsink (arcsinuskvadraticus) respektive arccosk (arccosinuskvadraticus).

Rötterna till *x* = cosk *v*



Om vi har ett funktionsvärde x ($x \neq 1$, $x \neq -1$) av cosinuskvadraticus finns det inom en period två möjliga rötter v till ekvationen $x = \text{cosk } v$, en i intervallet $45° < v < 135°$ och en i intervallet $225° < v < 315°$. Om arccosk ger roten inom intervallet $45° < v < 135°$, så kan alla rötter skrivas $v = \pm\text{arccosk } x + n \times 360°$.

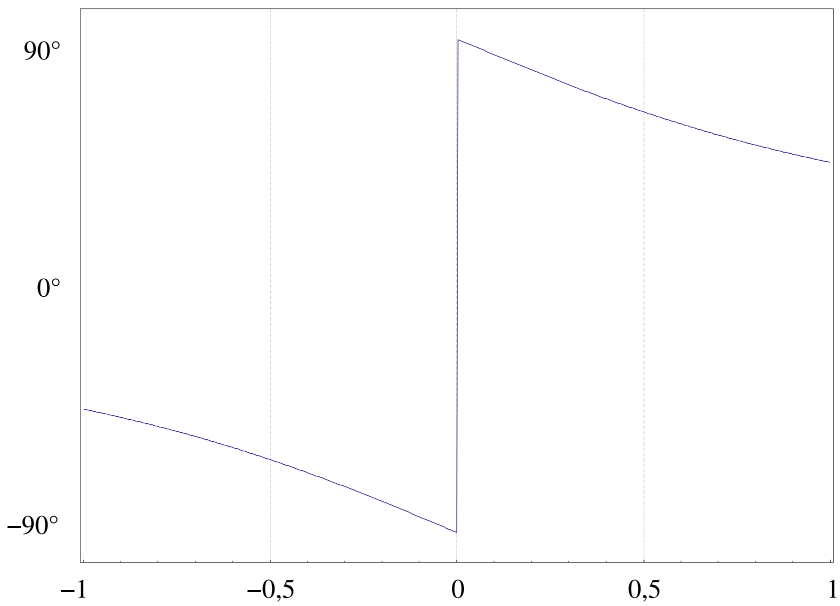
Vi vill nu finna ett uttryck för funktionen arccosk.

I intervallet $45° \le v \le 135°$ gäller att $\operatorname{cosk} v = \dfrac{\cos v}{\sin v}$.

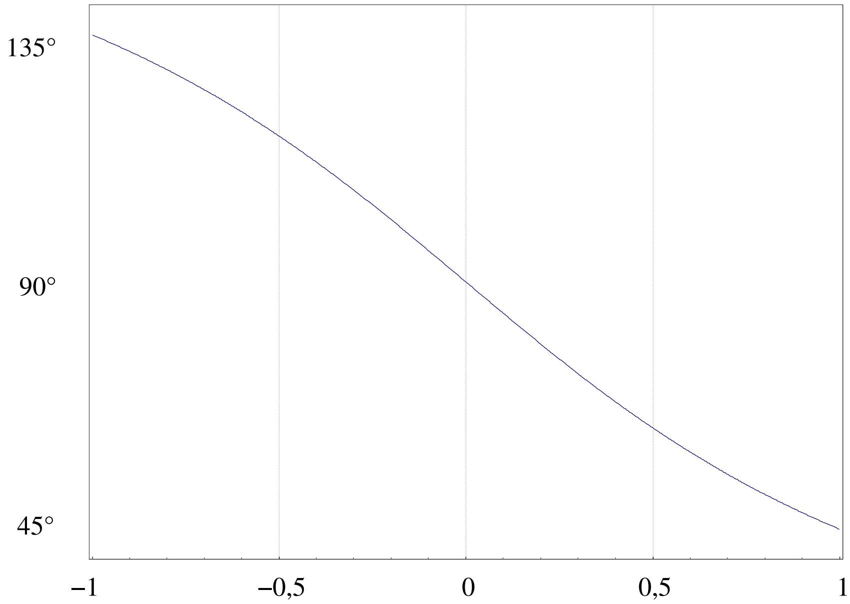
Låt $\operatorname{cosk} v = x$. Vi vill nu finna ett uttryck för v.

$$\frac{\cos v}{\sin v} = x$$
$$\frac{\sin v}{\cos v} = \frac{1}{x}$$
$$\tan v = \frac{1}{x}$$
$$v = \arctan\frac{1}{x} + n \times 180°$$

Vi undrar nu vilket/vilka *n* som ger önskade vinklar. Vi studerar grafen till $v(x)$ för normalfallet $n = 0$.



I intervallet $0 < x \le 1$ har grafen önskat utseende (den går från (knappt) 90° till 45°). I intervallet $-1 \le x < 0$ skulle vi önska att grafen gick från 135° till 90°, vilket den gör om vi i det intervallet använder $n = 1$.

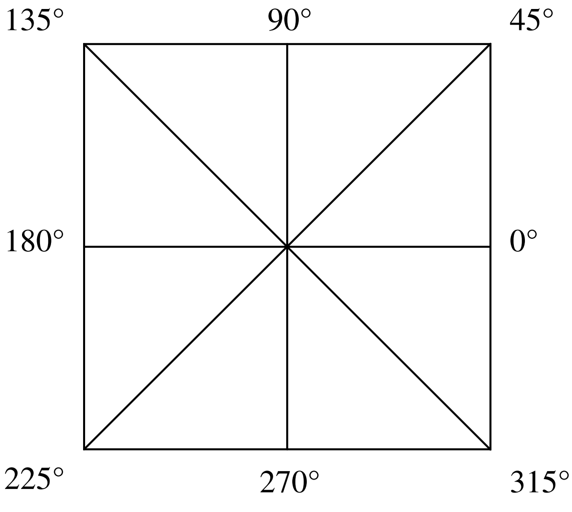


Sammanfattning

$$\text{arccosk } x = \begin{cases} \arctan(1/x) & \text{om } x > 0 \\ \arctan(1/x) + 180° & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Ekvationen $\text{cosk } v = x$ har rötterna $v = \pm \text{arccosk } x + n \times 360°$.

Rötterna till *y* = sink *v*



Om vi har ett funktionsvärde *y* ($y \neq 1$, $y \neq -1$) av sinuskvadraticus finns det inom en period två möjliga rötter *v* till ekvationen $y = \text{sink } v$, en i intervallet $-45° < v < 45°$ och en i intervallet $135° < v < 225°$. Om arcsink ger roten inom intervallet $-45° < v < 45°$, så kan alla rötter skrivas $v = \text{arcsink } y + n \times 360°$ samt $v = 180° - \text{arcsink } y + n \times 360°$.

Vi vill nu finna ett uttryck för funktionen arcsink.

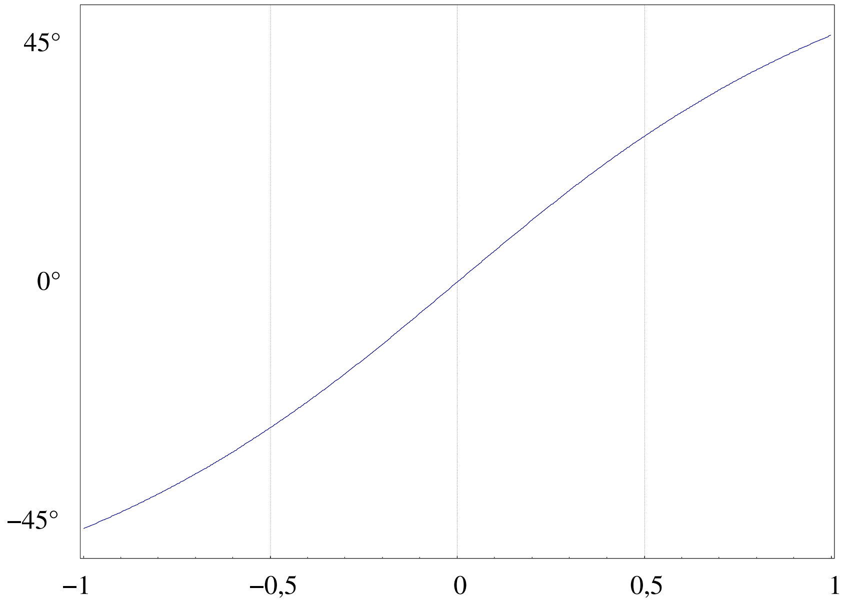
I intervallet $-45° \leq v \leq 45°$ gäller att $\text{sink } v = \tan v$.

Låt $\text{sink } v = y$. Vi vill nu finna ett uttryck för *v*.

$\tan v = y$

$v = \arctan y + n \times 180°$

Om vi ritar upp funktionen $v(y)$ ser vi att $n = 0$ ger önskad vinkel för alla y (grafen går från –45° till 45°).



Sammanfattning

$\text{arcsink } y = \arctan y$

Ekvationen $y = \text{sink v}$ har rötterna $v = \text{arcsink } y + n \times 360°$ samt $v = 180° - \text{arcsink y} + n \times 360°$

Program

Följande programmeringsfunktioner har skrivits för beräkning av sink v, cosk v, arcsink y samt arccosk x. Samtliga arbetar med grader som vinkelenhet. I sig är de periodiska sink- och cosk-funktionerna endast definierade för vinklar inom den första positiva perioden. För att råda bot på detta gör dessa funktioner om funktionsargumentet till motsvarande vinkel i den första naturliga perioden, med hjälp av funktionen Period.

Period

Denna funktion gör om argumentet (vinkeln) till motsvarande värde i den första naturliga perioden, genom att subtrahera vinkeln med produkten av periodens längd och den nedåt avrundade kvoten mellan vinkeln och periodens längd (d.v.s. så många hela naturliga perioder som återfinns innan perioden som argumentet finns i).

```
function Period(x: real): real;
begin
  result := x - Floor(x / 360) * 360;
end;
```

sink

```
function sink(x: real): real;
begin

  x := Period(x);

  if (x >= 45) and (x <= 135) then
    result := 1
  else if (x >= 225) and (x <= 315) then
    result := -1
  else if (x <= 45) or (x >= 315) then
    result := tan(x*Pi/180)
  else if (x >= 135) and (x <= 225) then
    result := - tan(x*Pi/180);

end;
```

cosk

```
function cosk(x: real): real;
begin

  x := Period(x);

  if (x <= 45) or (x >= 315) then
    result := 1
  else if (x >= 135) and (x <= 225) then
    result := -1
  else if (x >= 45) and (x <= 135) then
    result := cos(x*Pi/180) / sin(x*Pi/180)
  else if (x >= 225) and (x <= 315) then
    result := - cos(x*Pi/180) / sin(x*Pi/180);

end;
```

arcsink

```
function arcsink(x: real): real;
begin
  if (x < -1) or (x > 1) then
    Error('Arcsink x är endast definierad för -1<=x<=1.');
  result := arctan(x) * 180/Pi;
end;
```

arccosk

```
function arccosk(x: real): real;
begin
  if (x < -1) or (x > 1) then
    Error('Arccosk x är endast definierad för -1<=x<=1.');
  result := arctan(1/x) * 180/Pi;
  if x < 0 then result := result + 180;
end;
```

Räkneregler

Samband mellan sink och cosk

Sink och cosk har följande värdetabeller:

v	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
sink v	0	1	1	1	0	-1	-1	-1	0
cosk v	1	1	0	-1	-1	-1	0	1	1

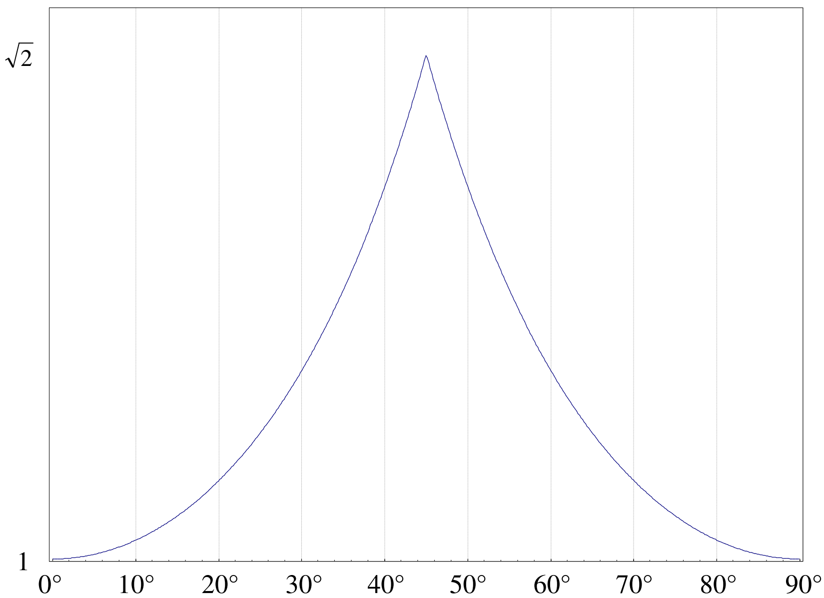
Vi ser att vi får sink v om vi förskjuter cosk v 90° åt höger, d.v.s. att $\operatorname{cosk}(v-90°)=\operatorname{sink} v$. Detta innebär också att $\operatorname{sink}(v+90°)=\operatorname{cosk} v$.

Den kvadratiska motsvarigheten till ”trigonometriska ettan”

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$, d.v.s. kvadraten på radien i enhetscirkeln. I ”enhetskvadraten”, ger uttrycket $\operatorname{sink}^2 x+\operatorname{cosk}^2 x=d^2$ kvadraten på diagonalen d i de rektanglar vi ritat upp (hypotenusan i trianglarna), d.v.s. kvadraten på avståndet mellan origo och punkten $(\operatorname{cosk} v, \operatorname{sink} v)$ på enhetskvadratens omkrets. Detta innebär att vi kan skapa en ny periodisk funktion *diagonal*, som ger avståndet som en funktion av vinkeln v.

$$\operatorname{diagonal}(v)=\sqrt{\operatorname{sink}^2 v+\operatorname{cosk}^2 v}$$

Denna funktion är periodisk med perioden 90°. Med hjälp av illustration 1 på sidan 3 kan vi bestämma funktionens extremvärden. För $v=n\times 90°$ är $\operatorname{diagonal}(v)=1$ och för $v=n\times 45°$, där n är ett udda tal, d.v.s. för alla $v=n\times 90°-45°$, där n är ett helt tal, är $\operatorname{diagonal}(v)=\sqrt{2}$.



Diskussion

Vi har funnit uttryck för funktionerna sink samt cosk, vi har funnit uttryck för de inversa funktionera och satt upp regler för ekvationslösning och vi har studerat räkneregler hos funktionerna. Alla metoder har varit generella, varför funktionerna nu är definierade och bevisade för alla reella funktionsargument inom de rimliga definitionsmängderna. (Att definiera arcsink samt arccosk för argument < -1 och > 1 är som exempel meningslöst.)

Referenser

Detta problem (d.v.s. endast innehållet i problemformuleringen) är hämtat från:

Brolin, Hans; Björk, Lars-Eric. *Matematik 3000 (Kurs C och D)*. Första upplagan, sjätte tryckningen. Natur och kultur. Falköping 2003.