Coulombs lag
och
Maxwells första ekvation

Inledning

Två punktladdningar q_1 samt q_2 i rymden påverkar varandra med kraften $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ där r är avståndet mellan dem. Kraften verkar längs den räta linjen mellan laddningarna, och laddningar med samma tecken repellerar varandra, medan laddningar med olika tecken attraherar varandra. Om en stor laddning Q placeras i origo, så kommer en liten testladdning q att påverkas med kraften

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

uttryckt i sfäriska koordinater. Detta är Coulombs lag. Det elektriska kraftfältet $\mathbf{E}$ kring Q definieras som kraften per laddning:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Inom elektromagnetismen postuleras Maxwells fyra ekvationer, vilka tillsammans beskriver elektriska och magnetiska fenomen. Den första ekvationen, som i princip motsvarar Coulombs lag, lyder

$$\oiint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

för alla slutna ytor S i vakuum som innesluter punktladdningen Q. Vi ämnar i det här dokumentet studera likheterna och skillnaderna mellan Coulombs lag och Maxwells (första) ekvation, som i all väsentlighet bör tolkas som *en ekvation i* **E**-*fältet*.

Ekvivalens?

Vi börjar med att utreda den mycket centrala frågan, om de två ekvationerna är matematiskt ekvivalenta med varandra. Först ämnar vi visa att ”Coulomb implicerar Maxwell”.

Sats 1

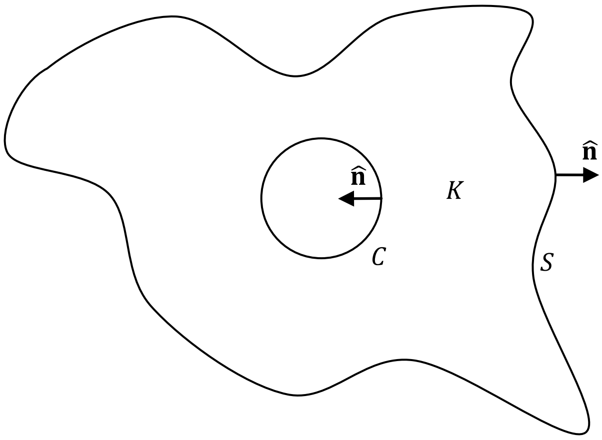
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} \Rightarrow \oiint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Bevis.

Om vi låter C vara enhetssfären så gäller att

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} \Rightarrow \oiint_C \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\oiint_C \frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{r^2}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi =$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\cdot 2\pi\cdot 2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Vi ser att Maxwells ekvation åtminstone gäller för enhetssfären som S. Vi vore färdiga om vi bara kunde visa att värdet av flödesintegralen är detsamma oavsett vilken sluten yta S vi integrerar över. Detta låter sig göras med Gauss' sats. Antag att vi vill beräkna flödet över ytan S i illustrationen nedan.



Om $\partial K = S \cup C$ så gäller enligt Gauss' sats att

$$\oiint_{S+C} \mathbf{E}d\mathbf{S} = \oiint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} + \oiint_C \mathbf{E}d\mathbf{S} = \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{E}dV.$$

Men eftersom

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \nabla\cdot\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}\right) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cdot r^2\sin\theta\right)\right) = 0$$

så måste

$$\oiint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = -\oiint_C \mathbf{E}d\mathbf{S}.$$

Om vi istället beräknar flödet *ut ur* enhetssfären, som tidigare, så får vi att

$$\oiint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

för alla slutna ytor S som omsluter punktladdningen Q. ∎

Vi har således visat att Maxwells ekvation följer av Coulombs lag, så om vi bara accepterar denna, har vi *bevisat* Maxwell. Vi har emellertid ännu inte undersökt om Maxwell innehåller all information – alla detaljer – som finns i Coulombs lag; till exempel kan man undra om Coulombs uttryck för **E**-fältet är den enda lösningen till Maxwells ekvation. Om vi lyckas visa att också Coulombs lag följer av Maxwells ekvation så råder alltså ekvivalens mellan ekvationerna, och vi är klara.

Vi väljer att visa detta under den fysikaliskt sett uppenbara förutsättningen att $\mathbf{E} = E_r(r)\hat{\mathbf{r}}$. För att åstadkomma detta behöver vi följande hjälpsats.

Lemma 2

$$\oiint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \text{ utanför origo}$$

Bevis.

I Maxwells ekvation ingår påståendet att flödet är oberoende av vilken sluten yta S vi väljer att integrera över. Om vi beräknar flödet ut ur den ihåliga kroppen K som består av en yttre begränsningsyta S_y och en inre begränsningsyta S_i, så att $\partial K = S_y \cup S_i$, så gäller Gauss' sats

$$\oiint_{S_i+S_y} \mathbf{E}d\mathbf{S} = \oiint_{S_i} \mathbf{E}d\mathbf{S} + \oiint_{S_y} \mathbf{E}d\mathbf{S} = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{E}dV.$$

Men eftersom flödet utåt skall vara oberoende av ytan så måste

$$\oiint_{S_y} \mathbf{E}d\mathbf{S} = -\oiint_{S_i} \mathbf{E}d\mathbf{S}$$

(minustecknet kommer av att vi över S_i beräknar flödet *inåt*), varför

$$\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{E}dV = 0$$

och följaktligen $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. ■

Redan här får vi reda på något om **E**-fältets explicita uttryck. Vi inser nämligen att om $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$ så måste

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (E_r(r)\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}(E_r(r)r^2 \sin\theta)\right) = 0 \Leftrightarrow E_r(r) = \frac{k}{r^2}.$$

Sats 3

Om $\mathbf{E} = E_r(r)\hat{\mathbf{r}}$ så gäller

$$\oiint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

Bevis.

I analogi med användningen av Gauss' sats i första beviset gäller att

$$\oiint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \iiint_K \underbrace{\nabla\cdot\mathbf{E}}_{=0}\, dV - \oiint_C \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oiint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = -\oiint_C \mathbf{E}d\mathbf{S},$$

där vi enkelt finner att

$$\oiint_C \mathbf{E}d\mathbf{S} = \oiint_C E_r(r)\hat{\mathbf{r}}d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -E_r(r)r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = -E_r(r)r^2 \cdot 2\pi \cdot 2 = -4\pi E_r(r)r^2$$

varför

$$\oiint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = -\oiint_C \mathbf{E}d\mathbf{S} = 4\pi E_r(r)r^2.$$

Men eftersom Maxwell påstår att

$$\oiint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

så måste

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \qquad \blacksquare$$

Flera laddningar

Om vi har *n* stycken laddningar kommer en testladdning att påverkas av *n* stycken krafter, vilka superponeras till en resulterande kraft. Coulombs lag ger

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i q}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i,$$

där Q_i, r_i och $\hat{\mathbf{r}}_i$ är laddningen hos punktladdning i, avståndet mellan laddningen och fältpunkten respektive riktningen på delkraften, varför det elektriska fältet blir

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i.$$

Om vi har en kontinuerlig laddningstäthet (längs en kurva, en yta eller i en kropp i rummet) ρ (enhet C/m, C/m^2 eller C/m^3), erhåller vi rimligtvis en integral som uttryck för fältet:

$$\mathbf{E} = \int_l \frac{\rho dl}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

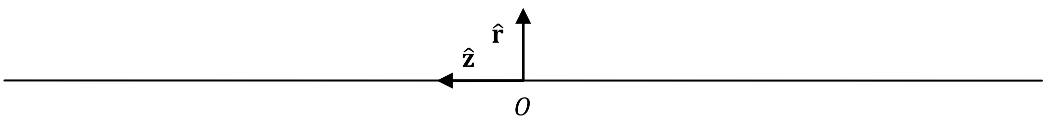
(Beroende på dimension får vi $\iint_S \frac{\rho dS}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$ eller $\iiint_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$.)

Maxwells ekvation $\oiint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ kan också användas i dessa fall, vilket kommer av att *integrationsoperationen är linjär*. Adderar vi nya laddningar i högerledet, så får vi också addera extra fält i integranden i vänsterledet.

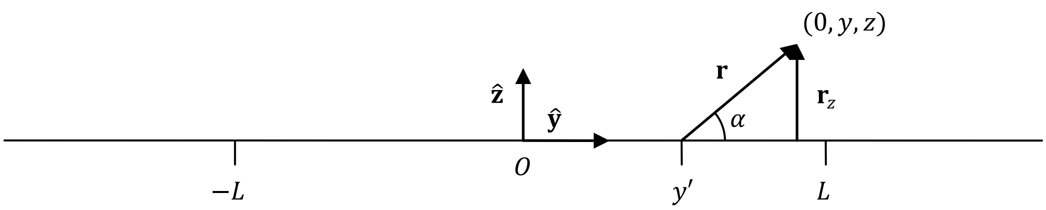
Vi har alltså två sätt att beskriva **E**-fältet på, dels ett *explicit* sätt i form av Coulombs lag, och dels ett *implicit* sätt i form av Maxwells ekvation. Man kan tycka att Maxwells ekvation är överflödig, eftersom man gärna föredrar explicita samband snarare än implicita sådana. Emellertid skall vi se att Maxwells ekvation ibland kan vara räknetekniskt överlägsen.

E-fältet kring en linje i rummet

Vi skall nu beräkna **E**-fältet runt en rät linje i rummet med den konstanta linjeladdningstätheten ρ (dimension C/m). Vi börjar med en tämligen naiv beräkning med integration av Coulombs kraft längs linjen.



Vi använder först ett cylindriskt koordinatsystem $(r, \phi, z), O$. Vi inser av symmetriskäl att det elektriska fältet inte kan bero på vinkeln ϕ, varför vi i praktiken kan nöja oss med att beräkna fältet i ett plan som innehåller linjen. Vi tar oss därför friheten att räkna med kartesiska koordinater.



Vi summerar samtliga kraftbidrag från området $y' \in]-L, L[$, där L är mycket stort, och beräknar fältet i punkten $(0, y, z)$. Enligt observationen ovan bestämmer vi alltså endast fältet i planet $x = 0$.

Vi får

$$\mathbf{E} = \int_{-L}^{L} \frac{\rho dy'}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{dy'}{r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

Vi inser att alla bidrag i $\hat{\mathbf{y}}$-led kommer att summera till noll av symmetrin, så vi sluter oss till att $\mathbf{E} = E_z(z)\hat{\mathbf{z}}$. Vi kan då för enkelhets skull på en gång börja räkna skalärt, och bara summera kraftkomponenterna i $\hat{\mathbf{z}}$-led.

Om den totala kraften från en liten laddningspunkt är lika med $|\mathbf{F}|$, så inser vi att komponenten i $\hat{\mathbf{z}}$-led är lika med $|\mathbf{F}_z| = |\mathbf{F}| \cdot \sin\alpha$, där $\alpha = \arctan\frac{z}{y-y'}$. Men eftersom $\sin\arctan\frac{p}{q} = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$ så har vi $|\mathbf{F}_z| = |\mathbf{F}| \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2+(y-y')^2}}$. Vi får integralen

$$\mathbf{E} = \frac{\rho\hat{\mathbf{z}}}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{dy'}{r^2}\sin\alpha = \frac{\rho\hat{\mathbf{z}}}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{dy'}{(z^2+(y-y')^2)}\frac{z}{\sqrt{z^2+(y-y')^2}} =$$

$$= \frac{\rho\mathbf{z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{dy'}{(z^2+(y-y')^2)^{3/2}} = \left|\begin{matrix} t = y - y' \\ dt = -dy' \\ y' \to L \Leftrightarrow t \to y - L \\ y' \to -L \Leftrightarrow t \to y + L \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{\rho\mathbf{z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{y+L}^{y-L}\frac{-dt}{(z^2+t^2)^{3/2}} = \frac{\rho\mathbf{z}}{4\pi\epsilon_0}\int_{y-L}^{y+L}\frac{dt}{(z^2+t^2)^{3/2}}.$$

Man kontrollerar enkelt att

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{z^2\sqrt{t^2+z^2}}\right) = \frac{1}{(z^2+t^2)^{3/2}}$$

varför

$$\mathbf{E} = \frac{\rho\mathbf{z}}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{t}{z^2\sqrt{t^2+z^2}}\right]_{y-L}^{y+L} = \frac{\rho\mathbf{z}}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{y+L}{z^2\sqrt{(y+L)^2+z^2}} - \frac{y-L}{z^2\sqrt{(y-L)^2+z^2}}\right].$$

Om L är mycket stort (går mot oändligheten) kan vi försumma alla termer i täljarna förutom L, och i nämnarna kan vi försumma alla termer förutom L^2 under rottecknet, så vi får att gränsvärdet av differensen inom parentesen blir $\frac{L}{z^2L} + \frac{L}{z^2L} = \frac{2}{z^2}$.

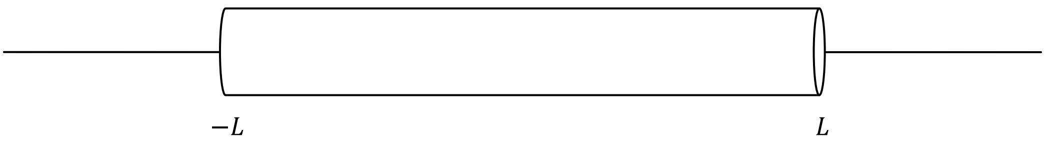
Slutligen får vi alltså

$$\mathbf{E} = \frac{\rho\mathbf{z}}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{z^2} = |\mathbf{z} = z\hat{\mathbf{z}}| = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 z}\hat{\mathbf{z}}.$$

Maxwells ekvation

Vi borde också kunna härleda **E**-fältet med Maxwells ekvation; om inte annat så kan vi ju alltid återfå Coulombs lag från den, men vi märker strax att det inte är nödvändigt.

Vi lägger en sluten cylinder S med radien r med symmetriaxeln på linjen.



Eftersom fältet enbart har en radiell komponent blir flödet noll genom cylinderns ändytor; flödet genom mantelytan blir däremot ortogonalt, och därmed lika med fältets belopp gånger ytans area.

$$\oiint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow 2r\pi \cdot 2L \cdot E_r(r) = \frac{\rho \cdot 2L}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E_r(r) = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Vi får alltså omedelbart att

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}}.$$

Vi märker alltså att Maxwells ekvation är extremt mycket lättare att använda, än Coulombs lag, vid beräkning av **E**-fält kring laddningsfördelningar med olika geometri. Maxwells ekvation må vara implicit, men extremt praktisk.