

# Världshistoriens bästa sammanfattning av vektoranalysen

Andreas Rejbrand

## Vad handlar vektoranalysen om?

- **Fält**
  - Skälärfält
  - Vektorfält (inklusive potentialfält)
- **Differentialoperatorer på fält**
  - Gradient
  - Divergens
  - Rotation
- **Två sorters integraler**
  - Kurvintegraler (framför allt arbetsintegraler)
  - Ytintegraler (framför allt flödesintegraler)
- **Tre satser**
  - Greens sats
  - Gauss sats
  - Stokes sats
- **Lite om alternativa (icke-kartesiska) koordinatsystem i planet och i rummet**

## **Del 1: Förberedelser**

## Flervariabelanalys

Goda kunskaper i flervariabelanalys är nödvändiga för att framgångsrikt studera vektoranalys. Speciellt användbara är momenten

- kurvor och ytor
- skalär- och vektorfält
- gradient
- dubbel- och trippelintegraler (mycket viktigt).

En fullständig (160 sidor) sammanfattning av flervariabelanalysens grunder finns på

<http://rejbrand.se/rejbrand/dokument/flervariabelanalys.pdf>

Behovet av att repetera flervariabelanalysens grunder minskar något av det faktum att vi ger en mycket kort repetition av de mest centrala begreppen i *det här* dokumentet.

## Skalärfält

Ett *skalärfält* i planet (rummet) är en funktion som till varje punkt i planet (rummet) ordnar ett tal, d.v.s. en funktion av typen

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{i planet}) \quad \text{eller} \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{i rummet}).$$

**Exempel:**  $\phi(x, y) = 10 - x^2 - y^2$  kan tolkas som temperaturen i punkten  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exempel:**  $\psi(x, y, z) = 10 - x^2 - y^2 - z^2$  kan tolkas som temperaturen i punkten  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

## Nivåmängder

### *I planet: nivåkurvor*

Givet ett skalärfält  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  i *planet* kan man erhålla en familj *kurvor*, de så kallade *nivåkurvorna*  $\phi(x, y) = c$  där  $c \in V_\phi$ .

**Exempel:** Betrakta igen  $\phi(x, y) = 10 - x^2 - y^2$ . Då är  $\phi(x, y) = c$  mängden av punkter  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  där temperaturen är precis  $c$  grader Celsius. För varje  $c < 10$  är en sådan mängd en **cirkel** med centrum i origo.

### *I rummet: nivåytor*

Givet ett skalärfält  $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  i *rummet* kan man erhålla en familj *ytor*, de så kallade *nivåytorna*  $\psi(x, y, z) = c$  där  $c \in V_\psi$ .

**Exempel:** Betrakta igen  $\psi(x, y, z) = 10 - x^2 - y^2 - z^2$ . Då är  $\psi(x, y, z) = c$  mängden av punkter  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  där temperaturen är precis  $c$  grader Celsius. För varje  $c < 10$  är en sådan mängd en **sfär** med centrum i origo.

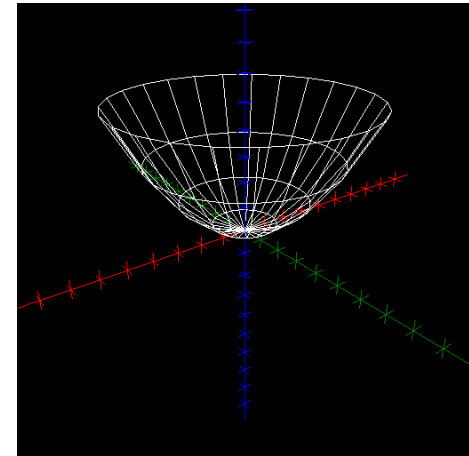
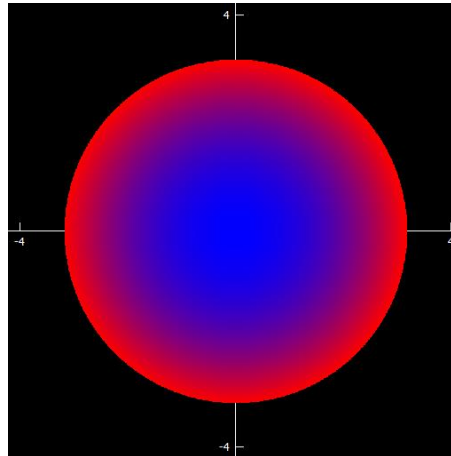
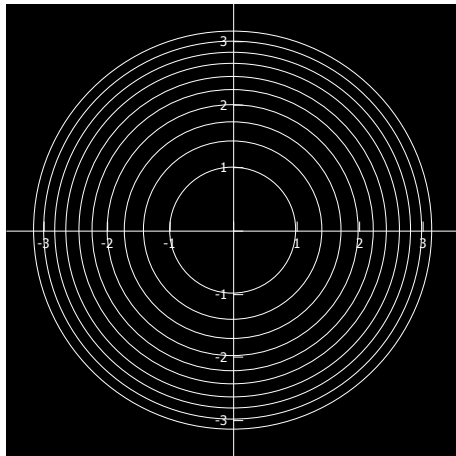
(I dessa båda exempel kan nivåmängderna kallas *isotermer*, eftersom de är mängder av punkter med samma temperatur.)

## Visualisering av skalärfält i planet

Ett skalärfält  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  i planet kan visualiseras på flera olika sätt.

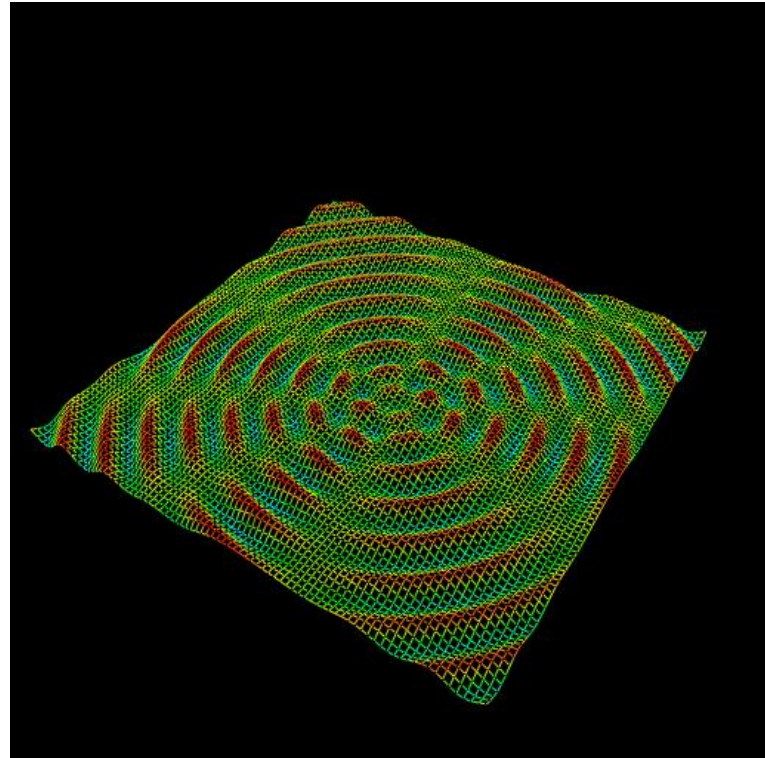
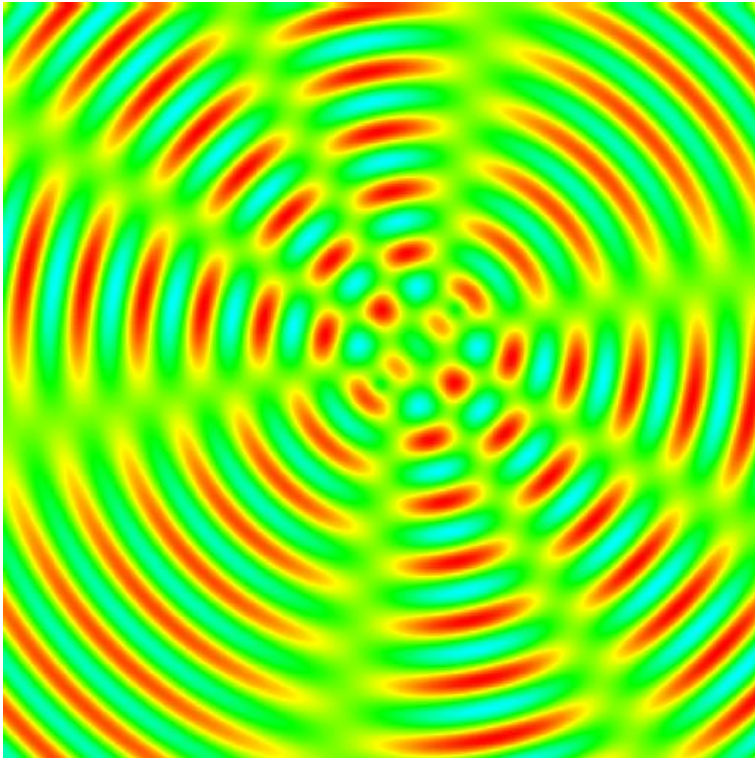
Som ett mycket enkelt exempel betraktar vi skalärfältet  $F(x, y) = x^2 + y^2$ . Nedan visas

- till vänster: **nivåkurvorna** med  $C = 1, 2, 3, \dots, 10$ ; samtliga dessa är koncentriska **cirk- lar** kring origo. Notera att nivåkurvornas täthet är ett mått på hur snabbt funktions- värdet ändras.
- i mitten: **ett färgat plan** där funktionsvärdet 0 svarar mot blå färg och funktionsvärdet 10 svarar mot röd färg. Däremellan ändras R- och B-komponenten i färgen rätlinjigt med funktionsvärdet.
- till höger: **grafan**  $z = F(x, y)$  som tydligen är en **(cirkulär) paraboloid**.



### *Bonusexempel*

Färgat plan och graf till ett skalärfält  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  som kan tänkas ge det vertikala utslaget hos en vattenyta i närheten av två punktformade vågkällor (interferensmönster).



**Övning i allmän tankeverksamhet:** Hur kan man via enkel digital bildbehandling erhålla en familj av nivåkurvor utifrån det färgade planet?



## Vektorfält

Ett *vektorfält* i planet (rummet) är en funktion som till varje punkt i planet (rummet) ordnar en vektor, d.v.s. en funktion av typen

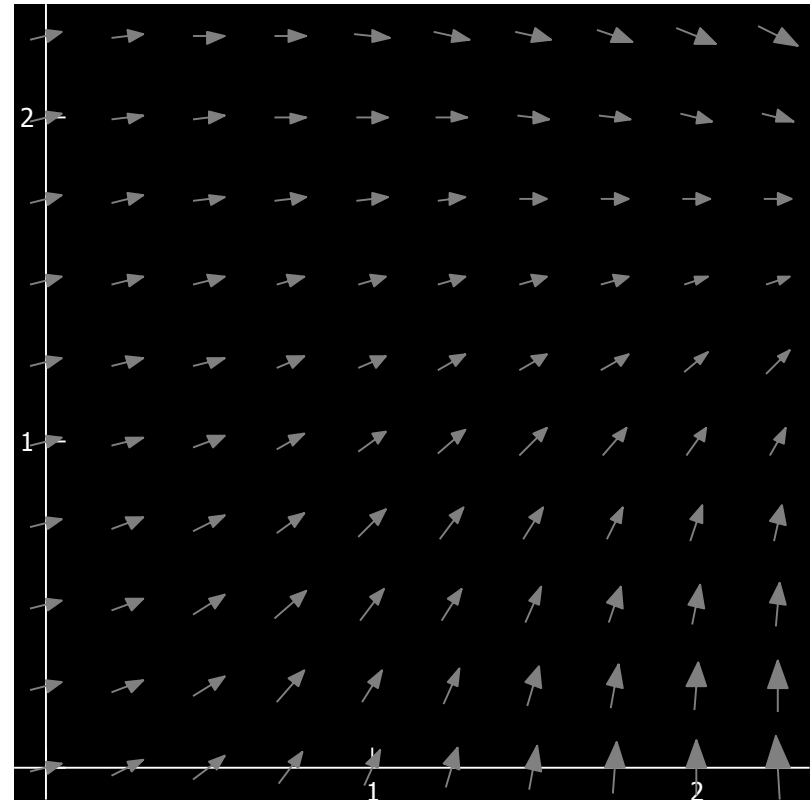
$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\text{i planet}) \quad \text{eller} \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\text{i rummet}).$$

### Exempel

Det plana vektorfältet  $\mathbf{A}$  som definieras av

$$\mathbf{A}(x, y) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 4 + xy - 2x \\ 1 - 2xy + 3x \end{pmatrix}$$

illustreras till höger.

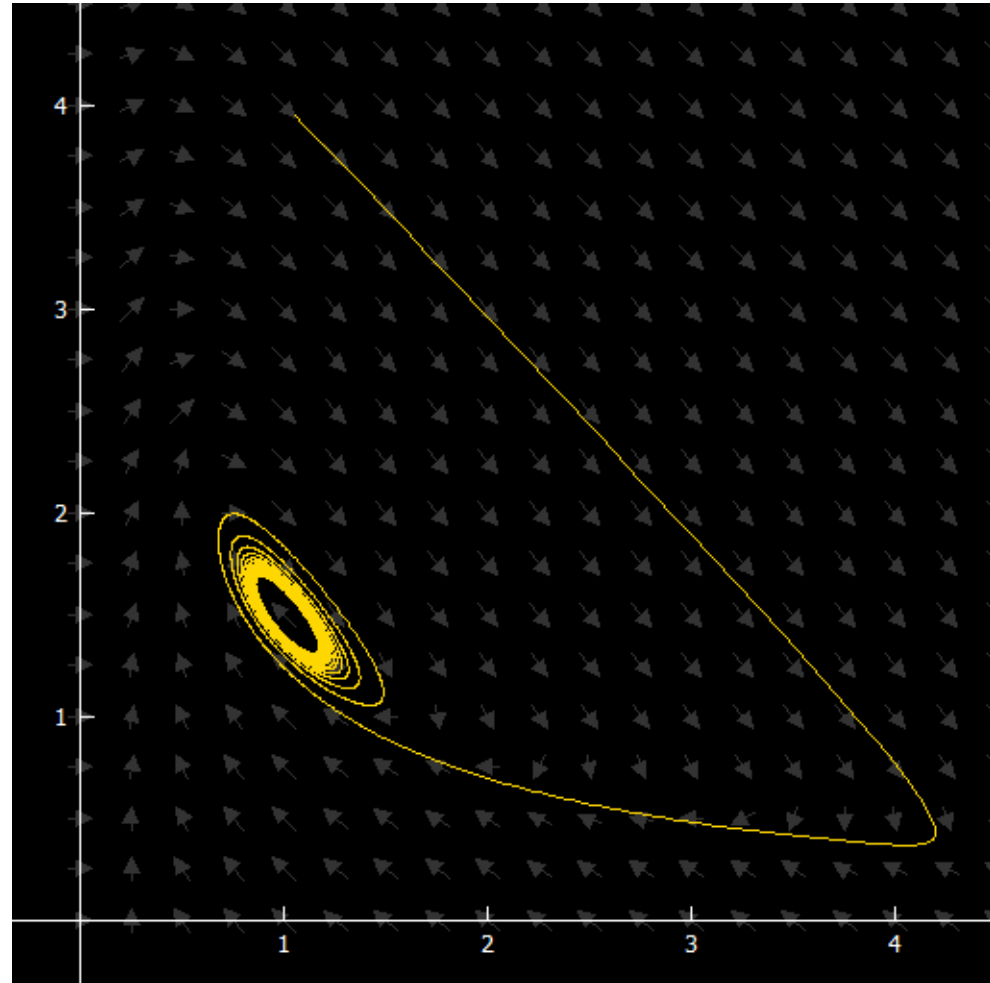


## Två fysikaliska tolkningar av vektorfält

Det finns två särskilt enkla och viktiga fysikaliska användningsområden av vektorfält.

### *Hastighetsfält*

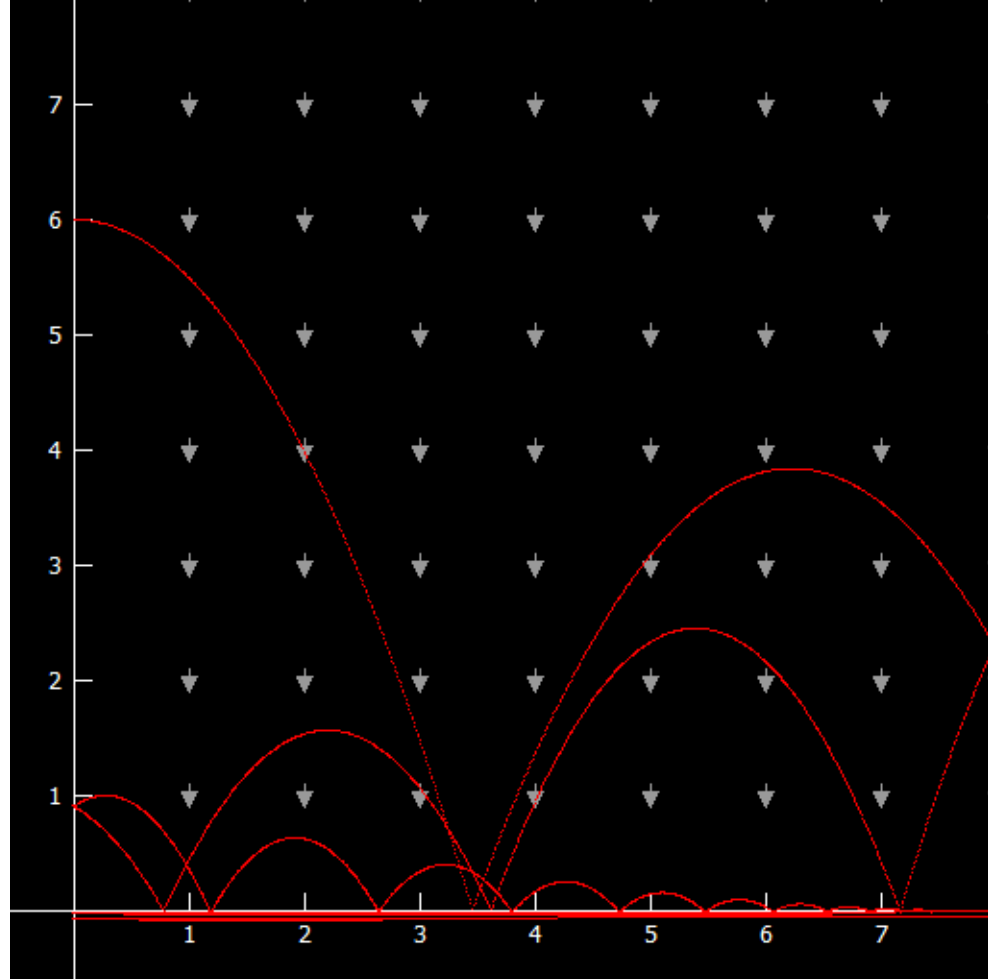
Dels kan  $\mathbf{v}(x, y)$  vara *hastighetsvektorn* hos ett flöde (t.ex. vattenflöde, gasflöde, blodflöde) i punkten  $(x, y)$ . Detta förutsätter, förstås, att hastighetsvektorn i punkten  $(x, y)$  inte beror på tiden, d.v.s. att flödet är *stationärt*. En partikel som rör sig med flödet kommer då att följa en *integralkurva* till vektorfältet, d.v.s. en kurva vars tangent alltid är lika med vektorn i samma punkt.



## Kraftfält

Å andra sidan kan  $\mathbf{F}(x, y)$  vara kraften i punkten  $(x, y)$ . En partikel kommer då ha accelerationen  $\frac{1}{m}\mathbf{F}(x, y)$  i den punkten. (I detta fall kommer partikeln i allmänhet *inte* att följa en integralkurva.)

Till höger visas vektorfältet  $\mathbf{F}(x, y) = -g\hat{y}$  som kan tolkas som gravitationsfältet i närheten av jordens yta. En boll har kastats från punkten  $(0,6)$  med utgångshastigheten  $(1,0)$ .

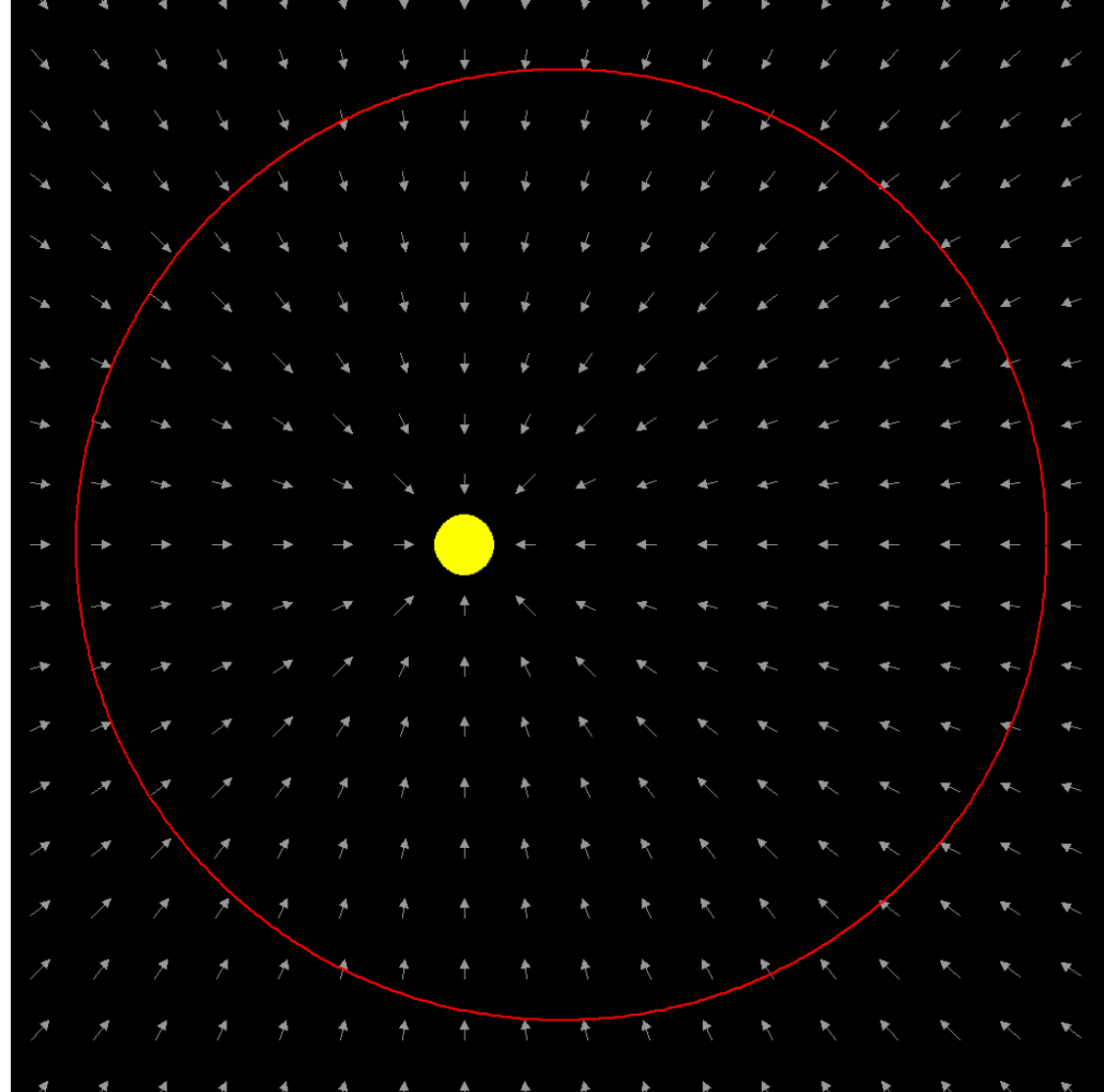


**Bonusexempel.** Betrakta gravitationsfältet i solsystemet:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Här rör sig partiklarna (d.v.s. planeterna) i ellipser med solen i ena brännpunkten.

Observera att illustrationen till höger använder samma längd på alla pilar, oberoende av vektorfältets belopp i den aktuella punkten. (Varför är det nödvändigt att göra så i det här fallet?)



## Operatorer

- Till varje skalärfält  $\phi$  hör ett vektorfält, den så kallade *gradienten*  $\nabla\phi$ , definierad av

$$\nabla\phi(x, y, z) = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right).$$

- Till varje vektorfält  $\mathbf{A}$  hör ett skalärfält, den så kallade *divergensen*  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ , definierad av

$$(\nabla \cdot \mathbf{A})(x, y, z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

- Till varje vektorfält  $\mathbf{A}$  hör ett annat vektorfält, den så kallade *rotationen*  $\nabla \times \mathbf{A}$ , definierad av

$$(\nabla \times \mathbf{A})(x, y, z) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

(Formlerna ovan gäller i  $\mathbb{R}^3$ . Notera att  $\nabla$  och  $\nabla \cdot$  har uppenbara generaliseringar till  $\mathbb{R}^n$ .)

$$\begin{cases} \nabla\phi \\ \nabla \cdot \mathbf{A} \\ \nabla \times \mathbf{A} \end{cases} \text{ skrivs också } \begin{cases} \text{grad } \phi \\ \text{div } \mathbf{A} \\ \text{rot } \mathbf{A} \end{cases} \text{ eller, på engelska, } \begin{cases} \text{grad } \phi \\ \text{div } \mathbf{A} \\ \text{curl } \mathbf{A} \end{cases} .$$

Notera att  $\begin{cases} \nabla \\ \nabla \cdot \\ \nabla \times \end{cases}$  är en operator som tar in ett  $\begin{cases} \text{skalärfält} \\ \text{vektorfält} \\ \text{vektorfält} \end{cases}$  och ger ifrån sig ett  $\begin{cases} \text{vektorfält} \\ \text{skalärfält} \\ \text{vektorfält} \end{cases} .$

## Konventioner

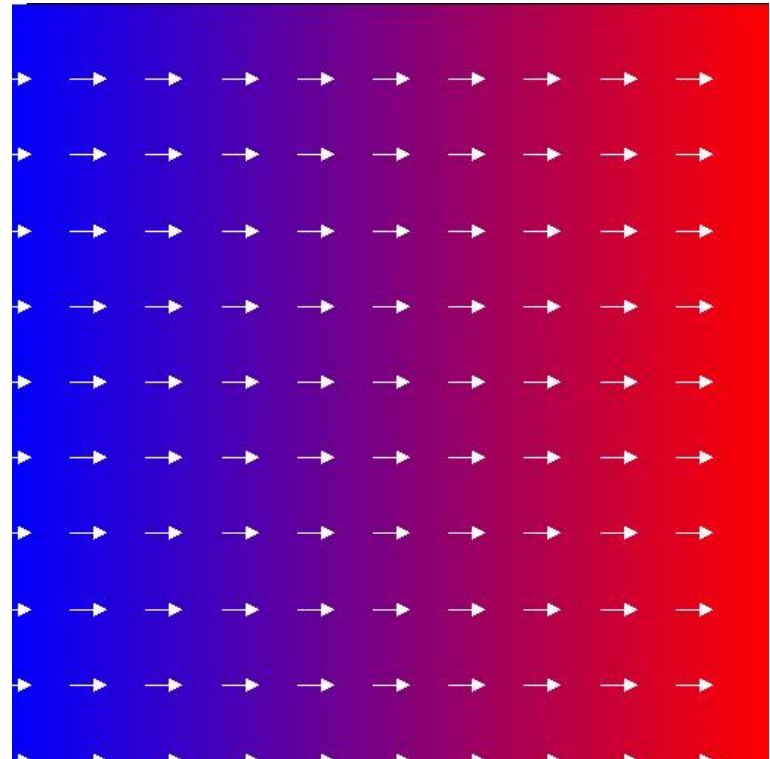
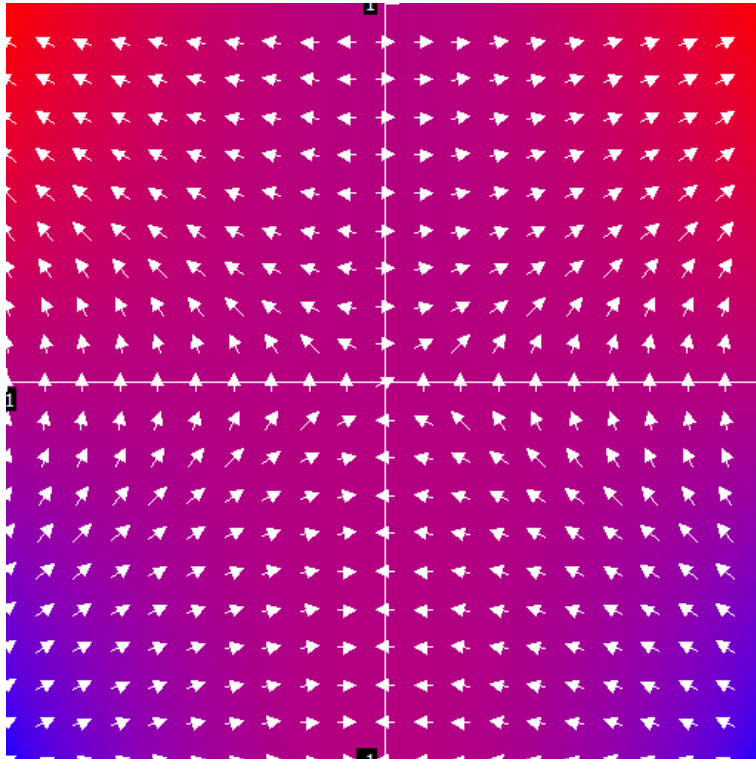
Ibland låtsas man att  $\nabla$  är en "vektor" med "komponenter"  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ .

I sådana fall kan  $\nabla\phi$  rent formellt betraktas som "vektorn"  $\nabla$  "går" (eg. "verkande på") skalärfältet  $\phi$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  kan rent formellt betraktas som "skalärprodukten" mellan "vektorn"  $\nabla$  och vektorfältet  $\mathbf{A}$ , och  $\nabla \times \mathbf{A}$  kan rent formellt betraktas som "kryssprodukten" mellan "vektorn"  $\nabla$  och vektorfältet  $\mathbf{A}$ . Detta bör dock endast betraktas som minnesregler, och inget annat.  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$  är ju inte en vektor (komponenterna är ju inte tal).

Den "sunda" inställningen är att  $\nabla$ ,  $\nabla \cdot$  och  $\nabla \times$  är operatorer "in their own right" enligt ovan, definierade av sin verkan på fält enligt förföregående sida. (Detta framgår extra tydligt med den alternativa notationen  $\text{grad } \phi$ ,  $\text{div } \mathbf{A}$  och  $\text{rot } \mathbf{A}$ .)

## Geometriska tolkningar

- Den geometriska tolkningen av *gradienten*  $\nabla\phi$  är välkänd sedan flervariabelanalysen.  $\nabla\phi$  är ett vektorfält, och vektorn  $\nabla\phi(x, y, z)$  i punkten  $(x, y, z)$  är vinkelrät mot skalärfältets nivå mängd genom just den punkten. Vektorn pekar åt det håll skalärfältet växer snabbast, och vektorns längd är **riktningsderivatan** i denna riktning.





- Den geometriska tolkningen av *divergensen*  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  framgår av Gauss sats!  
 $(\nabla \cdot \mathbf{A})(x, y, z)$  är ett mått på den lokala *produktionen* i punkten  $(x, y, z)$ .

Tänk också på flöde av vatten, som är inkompressibelt:  $\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv 0$ .

- Den geometriska tolkningen av *rotationen*  $\nabla \times \mathbf{A}$  framgår av Stokes sats!  
 $(\nabla \times \mathbf{A})(x, y, z)$  är ett mått på den lokala *rotationen* i punkten  $(x, y, z)$ .

Tänk på ett (litet) skovelhjul i ett tvådimensionellt flöde eller en (liten) boll i ett tredimensionellt flöde.

Även om geometriska tolkningar är trevliga och i många fall användbara, så är de oprecisa (i synnerhet de två sista ovan); det är alltid de precisa definitionerna av operatorerna som gäller.

## Vektoridentiteter

Det är lätt att visa att

$$\nabla \times (\nabla \phi) \equiv \mathbf{0}$$

för varje skalärfält  $\phi$  ("ett potentialfält är alltid virvelfritt").

Det är också lätt att visa att

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

för varje vektorfält  $\mathbf{A}$  (tänk på Stokes sats eller magnetfält och Maxwells ekvationer).

Slutligen bör alla känna igen en av fysikens allra viktigaste ekvationer, nämligen Laplaces ekvation  $\nabla^2 \phi = 0$  där *Laplaceoperatorn*  $\nabla^2 (= \Delta)$  definieras av

$$\nabla^2 \phi := \nabla \cdot (\nabla \phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (\text{i rummet}).$$

## Kurvor i planet

En kurva i planet kan ges av **en ekvation i planets koordinater**. Till exempel är enhetscirkeln

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}.$$

Vi säger att  $x^2 + y^2 = 1$  är *ekvationen* för enhetscirkeln. Ofta säger man lite slarvigt att själva ekvationen  $x^2 + y^2 = 1$  "är" enhetscirkeln.

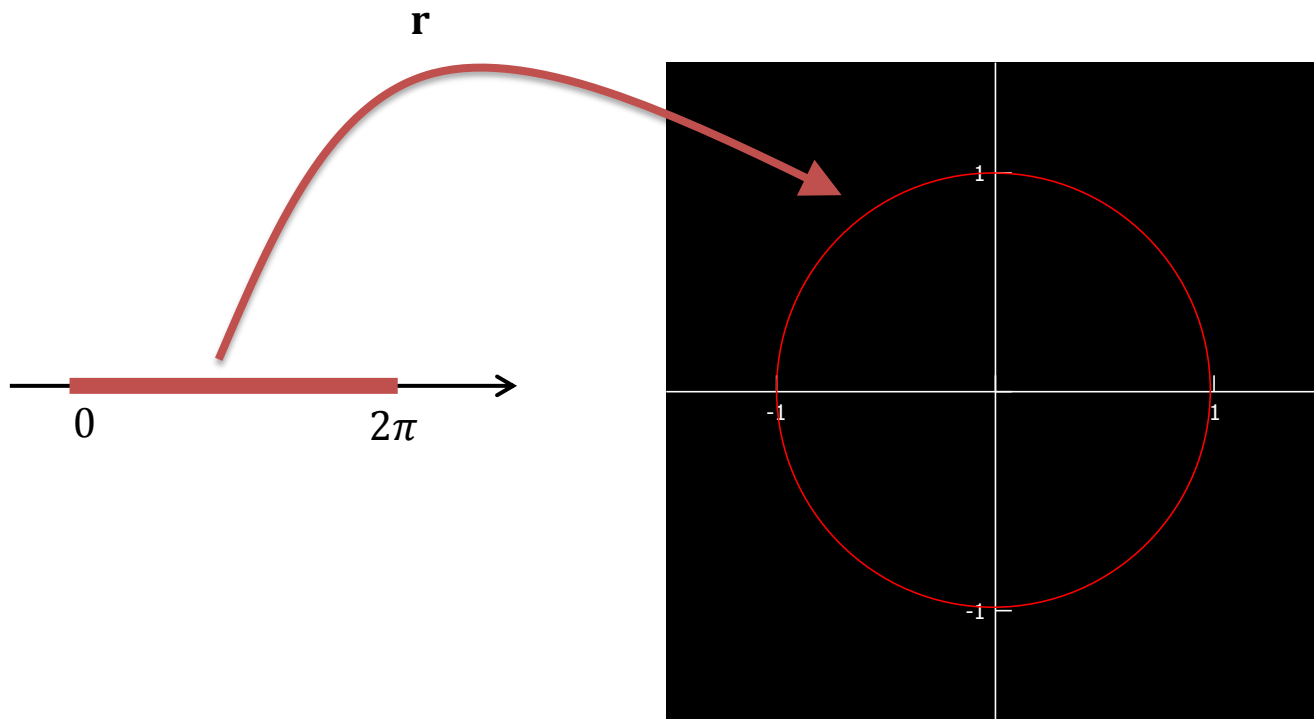
En kurva i planet kan också **parameteriseras**, d.v.s. skrivas som värdemängden till en funktion  $\mathbf{r}$  av typen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Till exempel är enhetscirkeln

$$C = \mathbf{r}([0, 2\pi[)$$

där

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0, 2\pi[.$$

$$\mathbf{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$



## Ytor i rummet

En yta i rummet kan ges av **en ekvation i rummets koordinater**. Till exempel är enhets sfären

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Vi säger att  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  är *ekvationen* för enhets sfären. Ofta säger man lite slarvigt att själva ekvationen  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  "är" enhets sfären.

En yta i rummet kan också **parameteriseras**, d.v.s. skrivas som värdemängden till en funktion  $\mathbf{r}$  av typen  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Till exempel är enhets sfären

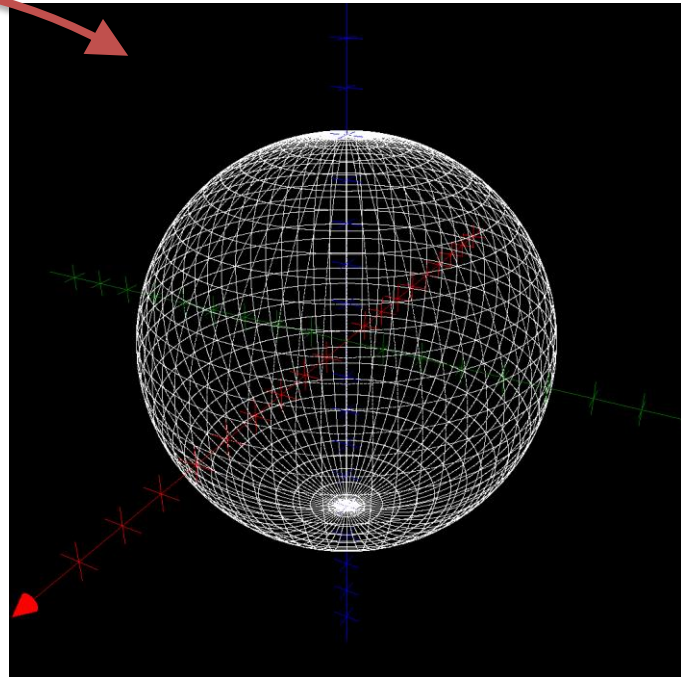
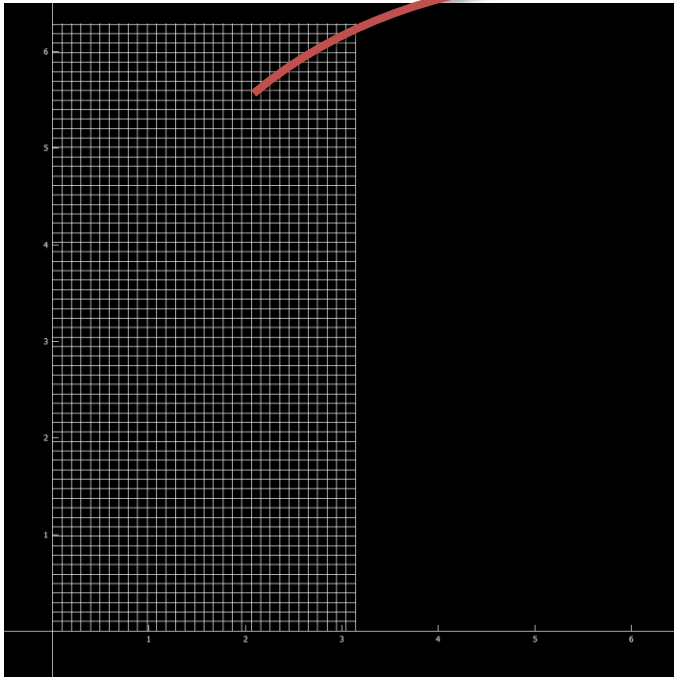
$$S = \mathbf{r}([0, \pi] \times [0, 2\pi[)$$

där

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \forall (\theta, \varphi) \in \underbrace{[0, \pi] \times [0, 2\pi[}_{\text{parameterområdet,}} \\ \text{i det här fallet en} \\ \text{rektangel i} \\ \text{parameterplanet} \\ \text{(\theta\varphi\text{-planet).}}$$

$$\mathbf{r}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

**r**



## Kurvor i rummet

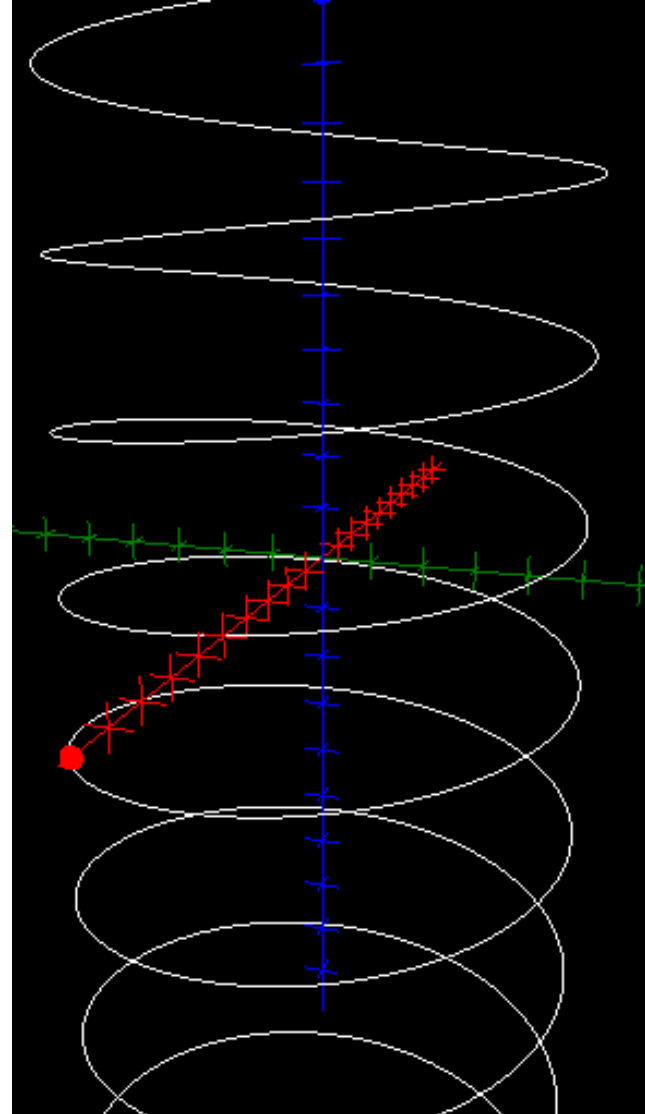
En kurva i rummet kan naturligtvis inte skrivas som en ekvation i rummets koordinater (för en sådan ekvation ger ju en *yta* eftersom  $3 - 1 = 2$ ). Däremot kan en kurva förstås anges med hjälp av *två* sådana ekvationer; kurvan är då tydligen snittet mellan två ytor (en *skärningskurva*).

En kurva i rummet kan också parameteriseras, d.v.s. skrivas som värdemängden till en funktion  $\mathbf{r}$  av typen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Till exempel är helixen

$$H = \mathbf{r}(\mathbb{R})$$

där

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$



## Observationer och exempel

Notera att parametrisering av kurvor och ytor i grund och botten handlar om att konstruera ett *koordinatsystem* på kurvan eller ytan i fråga.

- För att ange en position på en kurva krävs ett (1) tal – vi säger att en kurva är en en-dimensionell "sak" (eg. *mångfald*).
- För att ange en position på en yta krävs två (2) tal – vi säger att en yta är en tvådimensionell "sak" (mångfald).



**Exempel (kurva i rummet).** Snittet mellan cylindern

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1\}$$

och planet

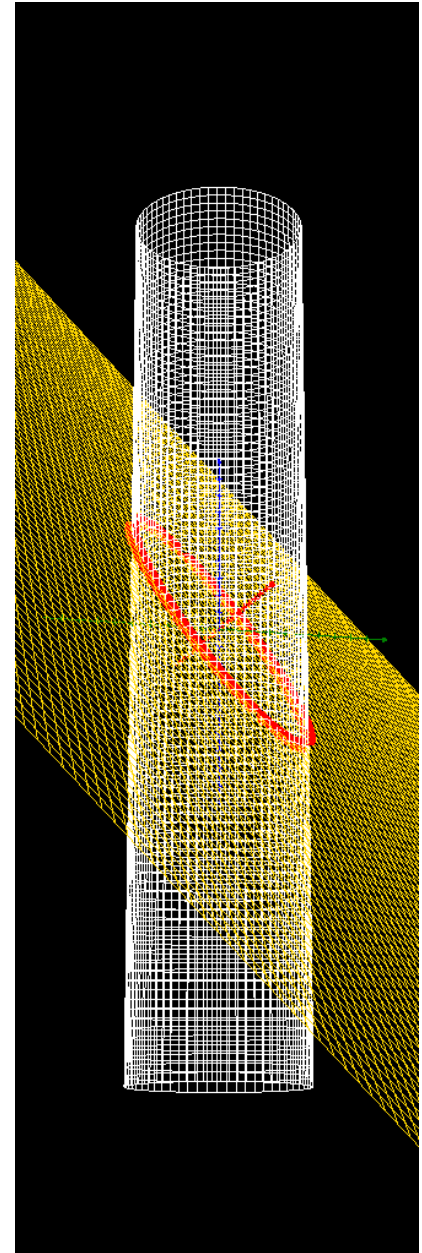
$$\Pi := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + y + z = 0\}$$

är ellipsen

$$\Gamma = C \cap \Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1 \text{ och } x + y + z = 0\}.$$

Denna är också bilden  $\Gamma = \mathbf{r}([0, 2\pi[)$  av intervallet  $[0, 2\pi[ \subset \mathbb{R}$  under parametriseringsfunktionen  $\mathbf{r}: [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  definierad av

$$\mathbf{r}(t) := \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0, 2\pi[.$$

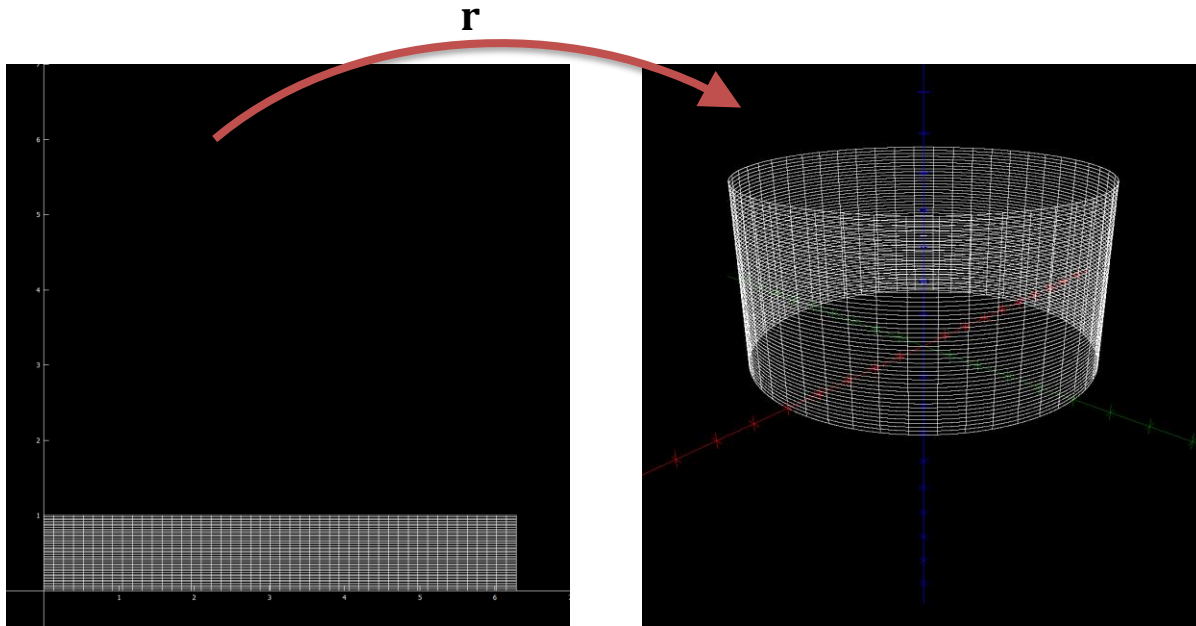


**Exempel (cylinder).** Cylindern

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1\}$$

är bilden  $C = \mathbf{r}(D)$  av rektangeln  $D = [0, 2\pi[ \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  under parametriseringsfunktionen  $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  definierad av

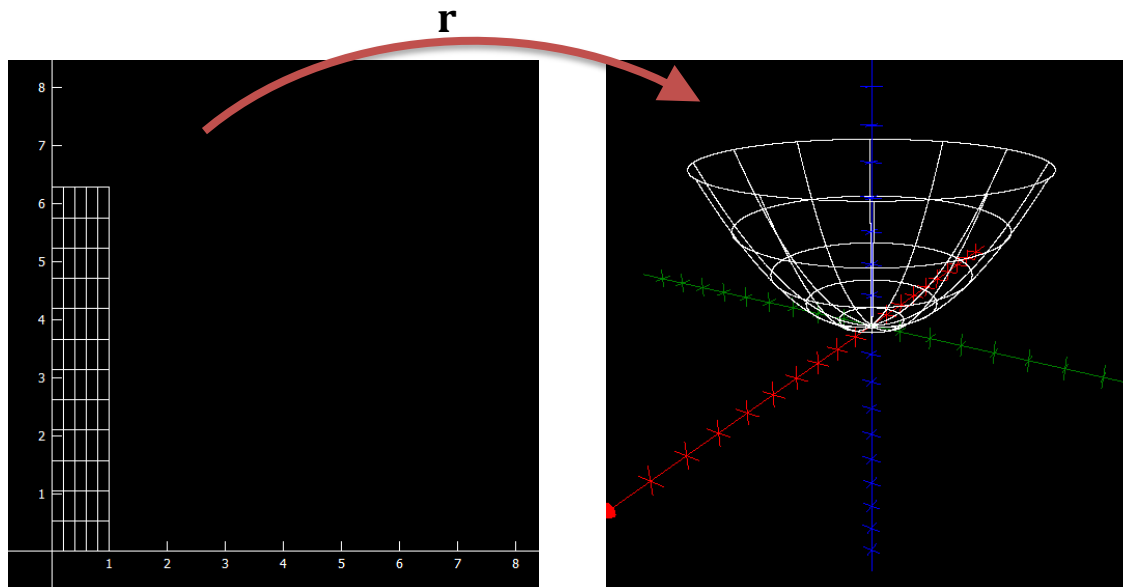
$$\mathbf{r}(u, v) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix}, \quad \forall (u, v) \in D.$$



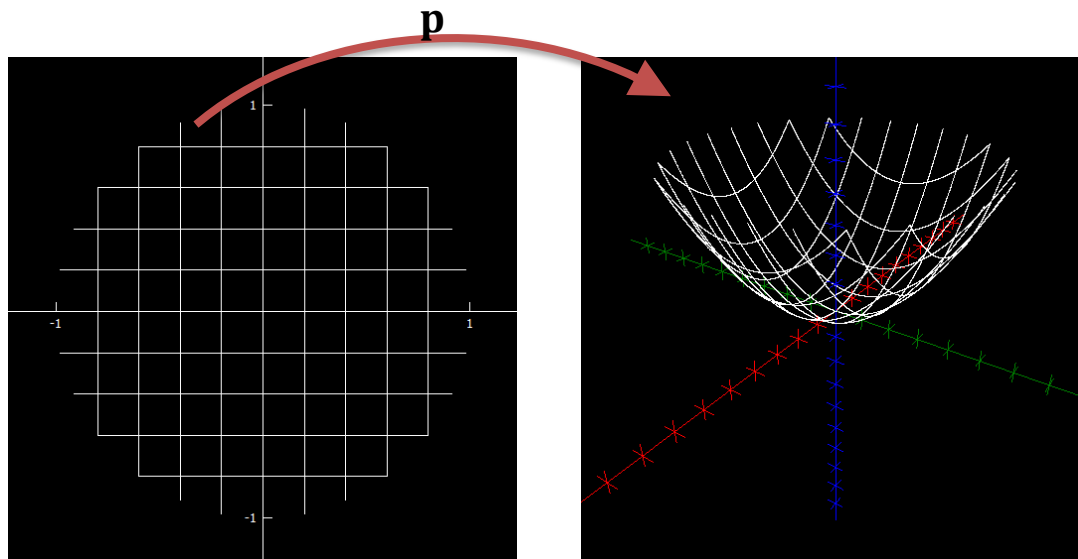
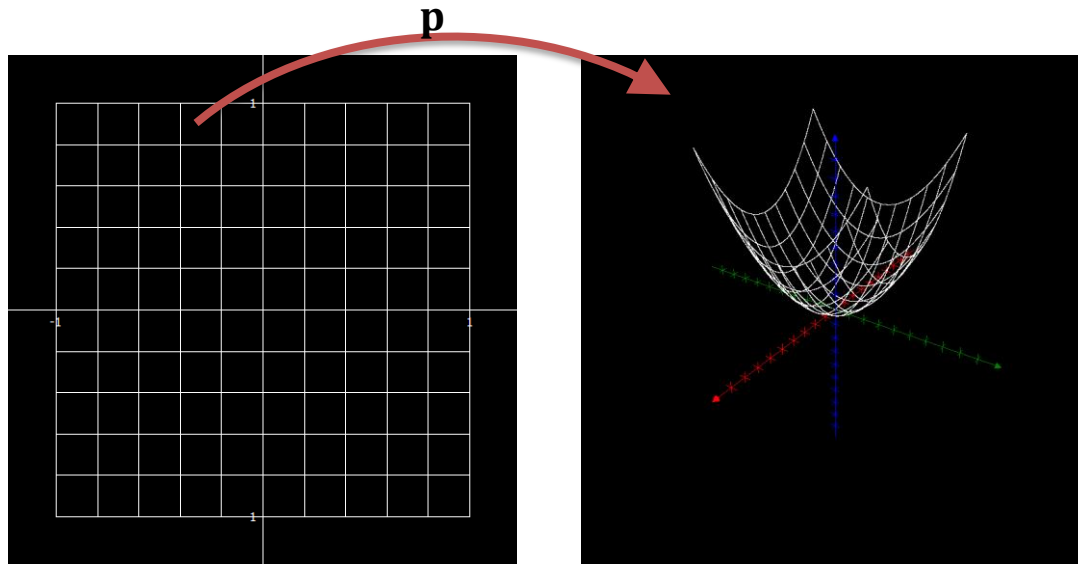
**Exempel (paraboloid).** Om ytan man vill parametrisera är en *graf* kan man använda  $x$  och  $y$  (om  $z$  kan uttryckas i  $x$  och  $y$ ) som parametrar.

Som exempel, betrakta paraboloiden  $z = x^2 + y^2$ . Visst, den kan parametriseras på ett trigonometriskt sätt, med

$$\mathbf{r}(u, v) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ u^2 \end{pmatrix}:$$

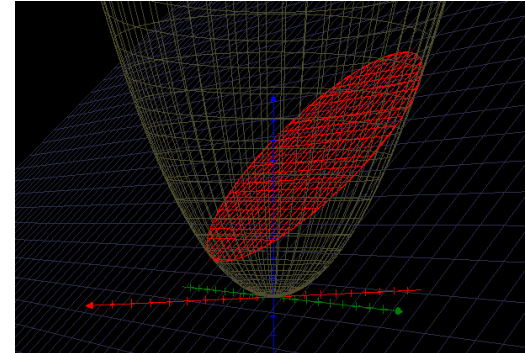


Men man kan också använda  $\mathbf{p}(u, v) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$ :



**Exempel** (*snett plan innanför paraboloid*). Ibland är det svåraste med en parametrisering att bestämma *parameterområdet*. Betrakta t.ex. den del  $S$  av planet  $\Pi: x + z = 1$  som ligger *innanför* paraboloiden  $P: z = x^2 + y^2$ . Det är klart att den här ytan (som är en del av grafen till det plana skalärfältet  $(x, y) \mapsto 1 - x$ ) är  $S = \mathbf{r}(D)$  där

$$\mathbf{r}(u, v) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 - u \end{pmatrix}$$



för någon delmängd  $D \subset \mathbb{R}^2$ , men vilken? Jo, vi inser att  $D$  måste vara **skuggan** (eg. *den ortogonala projektionen*) av  $S$  på  $xy$ -planet (fast betraktat som en delmängd av  $\mathbb{R}^2$  i stället för av  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ). För att bestämma skuggan bestämmer vi först dess rand, vilken uppenbarligen är skuggan av skärningskurvan mellan planet och paraboloiden. Men

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \Pi \cap P &\implies \begin{cases} x + z = 1 \\ x^2 + y^2 = z \end{cases} \implies x^2 + y^2 = 1 - x \implies \\ \implies \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4} &\implies (x, y, z) \in C := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4} \right\} \end{aligned}$$

så att  $\Pi \cap P \subset C$ , d.v.s. **skärningskurvan är en delmängd av den cirkulära cylindern  $C$** .

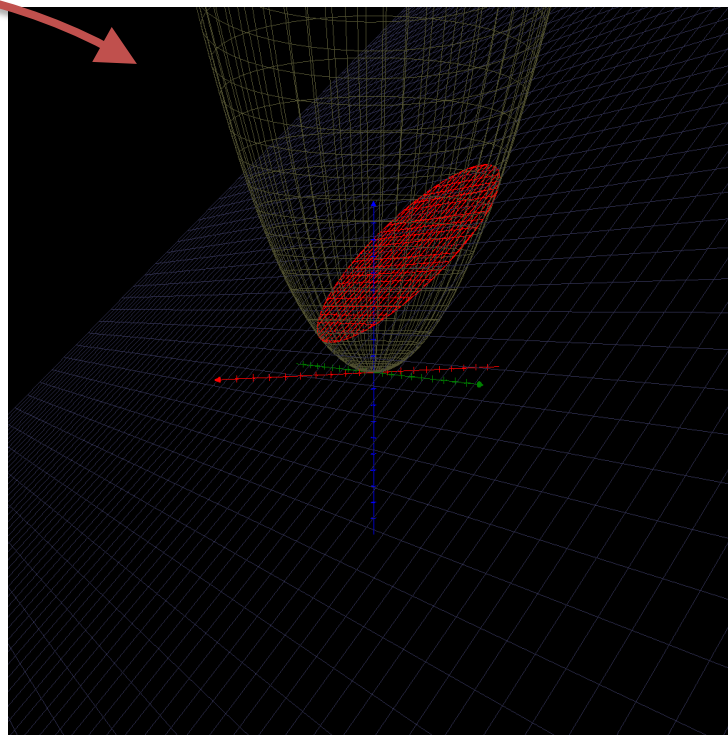
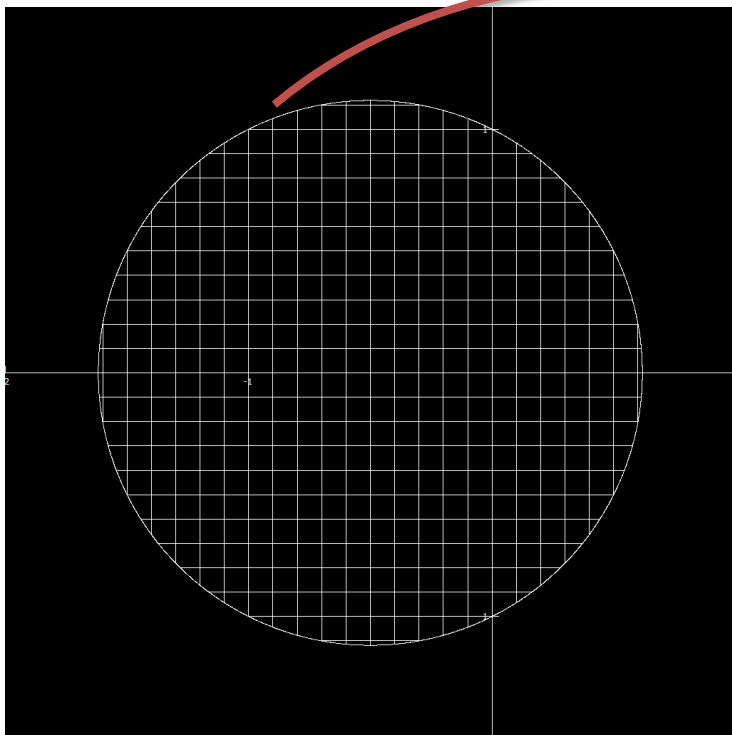
Därför är

$$D = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 \leq \frac{5}{4} \right\},$$

d.v.s.  $D$  är en den fyllda disken i  $uv$ -planet med radie  $\sqrt{5}/2$  kring punkten  $(-\frac{1}{2}, 0)$ . Se bild på nästa sida!

$$\mathbf{r}(u, v) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 - u \end{pmatrix}$$

$\mathbf{r}$



## Mer om ytor på parameterform

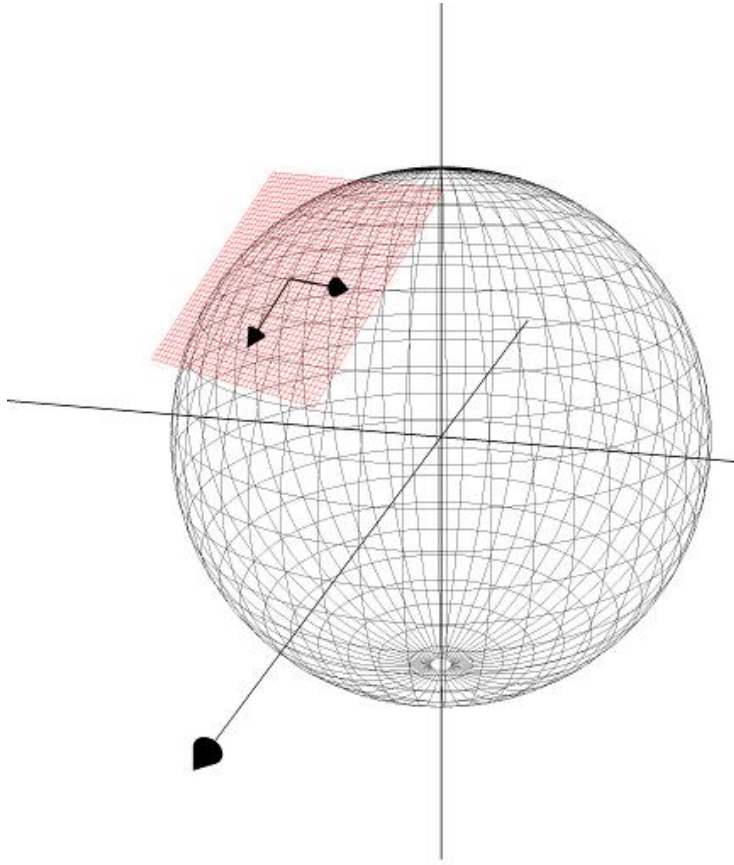
Låt  $\Sigma = \mathbf{r}(D) \subset \mathbb{R}^3$  vara en yta given på parameterform, d.v.s. den är bilden av parameterområdet  $D \subset \mathbb{R}^2$  under parametriseringsfunktionen  $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Låt koordinaterna i parameterplanet vara  $(u, v)$ .

Det är klart att  $\mathbf{r}'_u(u, v)$  och  $\mathbf{r}'_v(u, v)$  är *parameterkurvornas hastighetsvektorer* och  $\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)$  är en *normal* till ytan, allt i punkten  $\mathbf{r}(u, v) \in \Sigma$  med koordinaterna  $(u, v) \in D$ . Tangentplanet till ytan i den här punkten kan alltså parameteriseras

$$(x, y, z) = \mathbf{r}(u, v) + s \mathbf{r}'_u(u, v) + t \mathbf{r}'_v(u, v), \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

*Areaelementet* är  $dA = |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| du dv$ . Det är **areaförstoringen mellan parameterområdet och ytan**. Mer precist, om  $U \subset D$  är en delmängd till parameterområdet, så har motsvarande del av ytan  $\Sigma$  arean  $\iint_U dA = \iint_U |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| du dv$ . Hela ytan  $\Sigma$  har följaktligen arean

$$A(\Sigma) = \iint_D dA = \iint_D |\mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)| du dv.$$



**Exempel.** Sfären med radie  $r > 0$  kring origo är  $\Sigma = \mathbf{r}(D)$  där

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

och parameterområdet är rektangeln

$$D = [0, \pi] \times [0, 2\pi[ \subset \mathbb{R}^2.$$

Parameterkurvornas hastighetsvektorer är

$$\mathbf{r}'_{\theta}(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \text{ och}$$

$$\mathbf{r}'_{\varphi}(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enhetsnormalen är

$$\hat{\mathbf{N}}(\theta, \varphi) = \frac{\mathbf{r}'_{\theta}(\theta, \varphi) \times \mathbf{r}'_{\varphi}(\theta, \varphi)}{|\mathbf{r}'_{\theta}(\theta, \varphi) \times \mathbf{r}'_{\varphi}(\theta, \varphi)|} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Areaelementet är

$$dA = |\mathbf{r}'_{\theta}(\theta, \varphi) \times \mathbf{r}'_{\varphi}(\theta, \varphi)| d\theta d\varphi = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

och ytans area är därför

$$A(\Sigma) = \iint_D dA = \iint_D r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = r^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = r^2 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi r^2.$$



## Mer om kurvor och ytor

Mer om kurvor och ytor finns i den nämnda artikeln om flervariabelanalys samt på

[www.trecs.se](http://www.trecs.se)

Se i synnerhet artikeln "Basic Theory".

## **Del 2: Vektoranalys**

## Kurvintegraler i planet

**Fysikalisk motivering:** Låt  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara ett kraftfält i planet, och låt  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  vara en orienterad kurva i planet. Hur stort arbete utför kraftfältet  $\mathbf{F}$  på en partikel när den förflyttar sig längs  $\gamma$ ?

**Lösning:** Antag att  $\gamma = \mathbf{r}(I)$  där  $\mathbf{r}$  är parametriseringsfunktionen och  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  är ett intervall. Dela in kurvan i  $N$  (t.ex. lika stora) bitar ( $N$  stort tal, så att varje bit blir väldigt liten). Låt  $t_i \in I$  vara tidpunkten då partikeln är vid bit nummer  $i$ ; den befinner sig då nära punkten  $\mathbf{r}(t_i)$  och känner av kraften  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i))$ . Samtidigt gör partikeln nästan exakt den rätlinjiga förflyttningen

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i) \approx \mathbf{r}'(t_i) \Delta t.$$

Arbetet under denna förflyttning är nästan precis

$$\Delta W_i := (\mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i)) \cdot \hat{\mathbf{t}}) \Delta s := \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t_i)}{|\mathbf{r}'(t_i)|} |\mathbf{r}'(t_i)| \Delta t = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i)) \cdot \mathbf{r}'(t_i) \Delta t.$$

Det totala arbetet blir då nästan precis

$$\sum_{i=1}^N \Delta W_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i)) \cdot \mathbf{r}'(t_i) \Delta t \quad \text{som} \rightarrow \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

när indelningen blir finare och finare. Det är alltså rimligt att antaga att det sökta arbetet är precis gränsvärdet av Riemannsumman, d.v.s. integralen

$$W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

**Definition.** Låt  $\mathbf{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara ett vektorfält och  $\gamma = \mathbf{r}([a, b])$  en kurva. Då är *kurvintegralen* av  $\mathbf{A}$  längs  $\gamma$

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} := \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

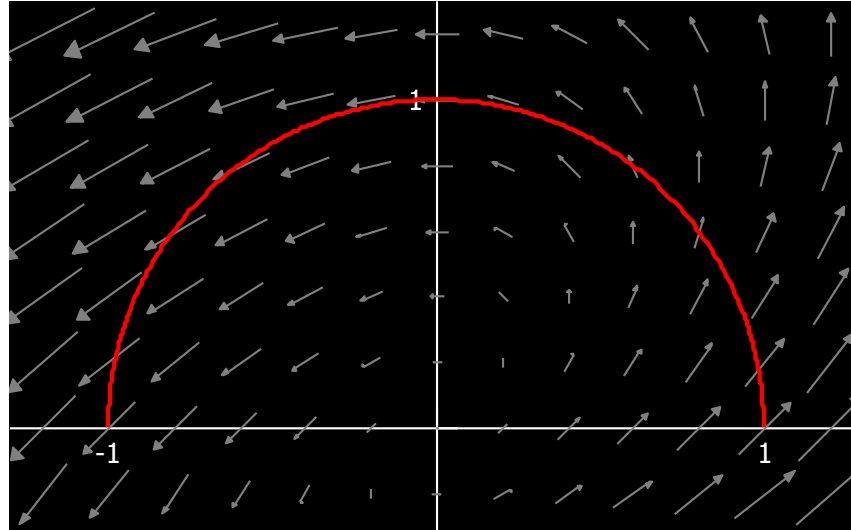
Om  $\mathbf{A}$  är ett kraftfält kan kurvintegralens värde följaktligen tolkas som det arbete kraftfältet utför på en partikel när den rör sig längs  $\gamma$ .

**Observation.** Vad händer om  $\mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \perp \mathbf{r}'(t)$  för alla  $t \in [a, b]$ ?

**Observation.**  $\int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{t}} ds.$

(Anmärkning. Det vi kallar "kurvintegraler" borde egentligen kallas "arbetsintegraler". En "arbetsintegral" är då en speciell sorts "kurvintegral".)

**Exempel 1.** Låt  $\mathbf{A}(x, y) = (x - y, x)$  och låt  $\gamma$  vara halvcirkeln från  $(1, 0)$  till  $(-1, 0)$  i övre halvplanet  $y \geq 0$ . Beräkna  $\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ .



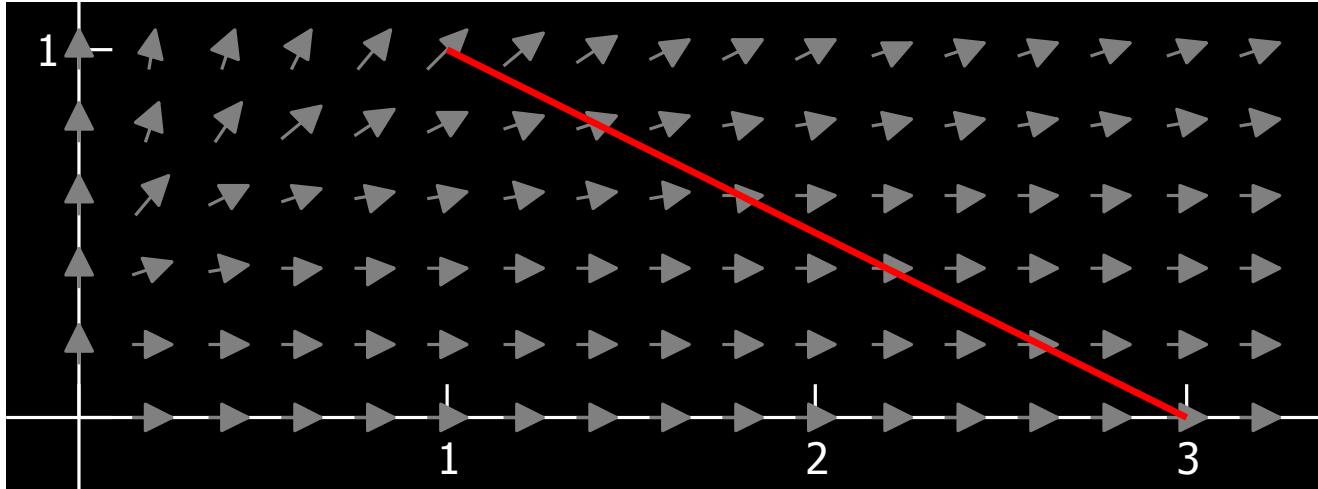
*Lösning:* Kurvan är  $\gamma = \mathbf{r}([0, \pi])$  där

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0, \pi].$$

Sålunda är

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^{\pi} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_0^{\pi} (-\sin t \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{\pi} \left( -\frac{1}{2} \sin 2t + 1 \right) dt = \int_0^{\pi} dt = \pi. \end{aligned}$$

**Exempel 2.** Låt  $\mathbf{A}(x, y) = (x, y^3)$  och låt  $\gamma$  vara det räta linjestycket från  $(3,0)$  till  $(1,1)$ .  
Beräkna  $\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ .



*Lösning:* Kurvan är  $\gamma = \mathbf{r}([0,1])$  där

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 - 2t \\ t \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0,1].$$

Sålunda är

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 - 2t \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (-6 + 4t + t^3) dt = \\ &= -\frac{15}{4}. \end{aligned}$$

## Greens sats

Låt  $\gamma$  vara en *sluten* (\*) och *enkel* kurva i planet, nämligen randen till området  $D$ , d.v.s.  $\gamma = \partial D$ . Om  $(x, y) \mapsto \mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  är ett vektorfält i planet, så är

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

där kurvintegralen är tagen i *positiv* riktning, d.v.s. området  $D$  är alltid till *vänster* om randen när man går i kurvans riktning.

( $\mathbf{F}$  är  $C^1$  i en omgivning till  $D$ ,  $\gamma$  är styckvis  $C^1$ . \* Inte som delmängd av  $\mathbb{R}^2$ , utan som kurva.)



**Exempel 1.** Låt  $\gamma$  vara enhetscirkeln och sätt  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2y, y^2x)$ . Eftersom  $\gamma = \mathbf{r}([0, 2\pi[)$  där  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$  ger en naiv beräkning att kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos^2 t \sin t \\ \sin^2 t \cos t \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t \sin^2 t + \sin^2 t \cos^2 t) dt = 0$$

och med Greens sats får vi, där  $D$  är den fyllda enhetsdisken,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (y^2 - x^2) dx dy = \left[ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \\ E := [0, 1] \times [0, 2\pi[ \end{array} \right] = \\ &= \iint_E (r^2 \sin^2 \varphi - r^2 \cos^2 \varphi) r dx dy = - \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi = \\ &= - \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi = -\frac{1}{4} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Att arbetet blir noll kan man faktiskt också se *direkt* eftersom  $\mathbf{F}(x, y) = xy(x, y) \parallel (x, y)$  överallt är vinkelrät mot enhetscirkeln.

**Exempel 2.** Låt  $\gamma$  vara enhetscirkeln och sätt  $\mathbf{F}(x, y) = (\sin x^2 + y, \sin e^y)$ . Eftersom  $\gamma = \mathbf{r}([0, 2\pi[)$  där

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

kan vi försöka att beräkna kurvintegralen på vanligt sätt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \sin(\cos^2 t) + \sin t \\ \sin(e^{\sin t}) \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin(\cos^2 t) \sin t - \sin^2 t + \sin(e^{\sin t}) \cos t) dt = ??? \end{aligned}$$

men med Greens sats får vi, där  $D$  är den fyllda enhetsdisken,

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_D dx dy = -A(D) = -\pi.$$

## Standardtrixande med Green

Låt  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara ett givet vektorfält i planet, och låt  $\gamma$  vara övre halvan av enhetscirkeln tagen moturs. Antag också att  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  är svår att beräkna på vanligt sätt. Hur kan Green komma till undsättning? ( $\gamma$  är ju inte en sluten kurva.)

**Exempel 3.** Låt  $\mathbf{F}(x, y) = (\sin y^2, 2xy \cos y^2 + x^3)$  och låt  $\gamma$  vara övre halvan av enhetscirkeln tagen moturs. Beräkna  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .

*Lösning:* Låt  $L$  vara det räta linjestycket från  $(-1, 0)$  till  $(1, 0)$  och låt  $D$  vara övre halvan av den fyllda enhetsdisken. Då är  $\int_{\gamma+L} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  å ena sidan, och Green ger  $\int_{\gamma+L} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$  å andra sidan. Eftersom

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= 3 \iint_D x^2 dx dy = \left[ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \\ E := [0, 1] \times [0, \pi] \end{array} \right] = 3 \iint_E r^3 \cos^2 \varphi dr d\varphi = \\ &= 3 \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

och

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left[ \begin{array}{l} \mathbf{r}(t) = (t, 0) \\ \mathbf{r}'(t) = (1, 0) \\ t: -1 \rightarrow 1 \end{array} \right] = \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_{-1}^1 \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

har vi

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{3\pi}{8}.$$

## Greens sats och areor i planet

Greens sats kan användas för att beräkna plana areor. Låt  $\gamma = \partial D$  vara en enkel sluten kurva, randen till det plana området  $D$ . Om vi betraktar *något* av vektorfälten

$$\mathbf{F}(x, y) = (0, x) \quad \text{eller} \quad (-y, 0) \quad \text{eller} \quad \frac{1}{2}(-y, x)$$

så ger Greens sats att

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D dx dy = A(D) = \text{Arean av } D.$$

I ord: *Arean av ett plant område är lika med kurvintegralen av något av vektorfälten  $\mathbf{F}$  ovan längs områdets rand (tagen i positiv riktning).*

För ett förträffligt pedagogiskt exempel, se [exemplet där vi bestämmer arean innanför den så kallade astroiden](#).

## Ytintegraler

Antag att du har en funktion  $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  definierad på någon yta  $\Sigma = \mathbf{r}(D)$ . Tänk dig att du delar in ytan i  $N$  bitar ( $N$  mycket stort och varje bit mycket liten) av arean  $\Delta A$ , och i varje bit beräknar produkten  $f\Delta A$ . Summera sedan. När indelningen blir finare går Riemannsumman mot en integral, den så kallade *ytintegralen* av  $f$  över  $\Sigma$ :

$$\sum f\Delta A \rightarrow \iint_{\Sigma} f dA = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv.$$

(I praktiken anges ofta  $f$  som en funktion  $D \rightarrow \mathbb{R}$ .) Notera att om  $f \equiv 1$  erhålles ytans area.

**Exempel.** Betrakta sfären  $S = \mathbf{r}(D)$  där

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \forall (\theta, \varphi) \in D$$

och  $D := [0, \pi[ \times [0, 2\pi]$ . Om ytladdningstätheten [i enheten C/m<sup>2</sup>] på  $S$  är  $f(\theta, \varphi) = \theta + \varphi$  i punkten med koordinater  $(\theta, \varphi) \in D$ , vad är då den totala laddningen på sfären?

*Lösning:* Laddningen är ytintegralen av  $f$  över  $S$ , d.v.s.

$$Q = \iint_S f dA = \iint_D (\theta + \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \dots = 6\pi^2.$$

## Flödesintegraler

Antag att  $\mathbf{J}$  är ett vektorfält i rummet som anger *flödestätheten* för något (t.ex. vätske- eller gas-) flöde, d.v.s.  $\mathbf{J}$  har enheten  $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ . Om  $\Sigma = \mathbf{r}(D)$  är en yta i rummet med enhetsnormal  $\hat{\mathbf{n}}$  i varje punkt så är *flödet av  $\mathbf{J}$  genom  $\Sigma$*  värdet av *flödesintegralen*

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} &:= \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA := \iint_D \mathbf{J}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|} \cdot |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, dudv = \\ &= \iint_D \mathbf{J}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) \, dudv. \end{aligned}$$

Notera att en flödesintegral är en speciell sorts ytintegral, nämligen en där funktionen vi integrerar över ytan är  $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , flödets projektion på normalriktningen. Värdet av integralen har förstås enheten  $\text{kg}/\text{s}$ .



**Exempel.** Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och "fjärdedelsparaboloiden"  $S = \mathbf{r}([0,1]^2)$  där

$$\mathbf{r}(u, v) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}.$$

Flödet av  $\mathbf{A}$  genom  $S$  är

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) \, dudv = \iint_D \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} \, dudv = \\ &= \iint_D (-2uv + 1) \, dudv = \int_0^1 \int_0^1 (-2uv + 1) \, du \, dv = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(Flödet är beräknat i riktningen "uppåt", d.v.s. "inåt". Hur ser man det?)

**Exempel.** Ibland behöver man inte ens parameterisera en yta för att beräkna en flödesintegral. I stället kan det räcka med att "hoppa in" direkt i definitionen.

Låt t.ex.

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \in [0,1], y \in [0,1], z = 3\} \quad (= [0,1]^2 \times \{3\})$$

vara en kvadrat i planet  $z = 3$ , och betrakta vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}.$$

Eftersom  $S$  naturligtvis har den uppåtpekande enhetsnormalen  $(0, 0, 1)$  ser vi direkt att flödet i riktningen uppåt är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = \iint_S \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, dA = 3 \iint_S dA = 3A(S) = 3$$

där  $A(S) = 1 \cdot 1 = 1$  är arean av kvadraten  $S$ .

## Gauss sats

Låt  $\mathbf{A}$  vara ett vektorfält i rummet och låt  $S = \partial K$  vara en sluten (\*) yta, nämligen begränsningsytan till området  $K$ . Då är flödet *ut ur*  $K$

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = \iiint_K (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dV.$$

( $\mathbf{A}$  är  $C^1$  i en omgivning av  $K$ ,  $S$  styckvis  $C^1$ . \* Inte som delmängd av  $\mathbb{R}^3$ , utan som yta.)

**Exempel.** Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \\ z + 1 \end{pmatrix}$$

och enhetsfären  $S = \mathbf{r}(D)$ , som är randen till enhetsklotet  $K$ , där

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \forall (\theta, \varphi) \in D$$

och  $D := [0, \pi[ \times [0, 2\pi]$ . Flödet ut genom  $S$  kan beräknas på naivt sätt:

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = \iint_D \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \\ \cos \theta + 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \sin \theta \, d\theta d\varphi = \dots = 4\pi.$$

Med Gauss sats blir räkningarna enklare, eftersom  $(\nabla \cdot \mathbf{A})(x, y, z) = 3$ . Vi får

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = \iiint_K (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dV = 3 \iiint_K dV = 3V(K) = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi.$$

## Standardtrixande med Gauss



## Kurvintegraler i rummet

Kurvintegraler i rummet fungerar som kurvintegraler i planet.

**Exempel.** Betrakta helixen  $\gamma = \mathbf{r}([a, b])$  där

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

samt vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Arbetet som kraftfältet  $\mathbf{F}$  utför på en partikel när den rör sig från  $\mathbf{r}(a)$  till  $\mathbf{r}(b)$  längs  $\gamma$  är

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_a^b (\sin^2 t + \cos^2 t + 1) dt = \int_a^b 2 dt = 2(b - a). \end{aligned}$$

## Stokes sats

Låt  $\mathbf{A}$  vara ett vektorfält i rummet, och  $\gamma$  en sluten (\*) och enkel kurva. Låt också  $W = \oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  vara kurvintegralen av  $\mathbf{A}$  längs  $\gamma$ .

Betrakta *någon* yta  $S$  som har  $\gamma$  som randkurva ( $\gamma = \partial S$ ) (\*\*) och låt  $\phi = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$  vara flödet av  $\nabla \times \mathbf{A}$  genom  $S$ . Då är

$$W = \pm \phi,$$

där plustecknet väljs omm  $\mathbf{n} \times \mathbf{t}$  pekar *in mot ytan*, där  $\mathbf{n}$  är ytans normal och  $\mathbf{t}$  är kurvans tangent, d.v.s. omm vi har ytan till *vänster* om oss när vi går i kurvans riktning med huvudet i ytans normalriktning.

( $\mathbf{A}$  är  $C^1$  i en omgivning av  $S$ ,  $S$  styckvis  $C^1$ . \* sluten: inte som delmängd av  $\mathbb{R}^3$ , utan som kurva. \*\* rand: inte som delmängd av  $\mathbb{R}^3$ , utan som yta.)

**Exempel 1.** Betrakta vektorfältet  $\mathbf{A}(x, y, z) = (x^2, xz^2, xz)$  och låt  $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$  vara en cirkel i planet  $z = 1$  (positivt orienterad sett ovanifrån). Då är  $\gamma = \mathbf{r}([0, 2\pi[)$  där  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ , så vi kan beräkna arbetet på vanligt sätt:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \cos^2 t \sin t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi. \end{aligned}$$

Men vi kan också använda Stokes sats. Rotationen av  $\mathbf{A}$  är

$$(\nabla \times \mathbf{A})(x, y, z) = (-2xz, -z, z^2).$$

Vi måste nu välja *någon* yta som har  $\gamma$  som randkurva. Det uppenbara valet är den del av planet  $z = 1$  som ligger innanför  $\gamma$ , d.v.s. vi väljer ytan  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$ . Vi behöver inte ens parameterisera ytan för att bestämma flödet genom den:

$$\phi = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \iint_S \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2xz \\ -z \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dA = \iint_S z^2 dA = \iint_S dA = A(S) = \pi.$$

När vi går runt  $\gamma$  med huvudet i riktningen  $\hat{\mathbf{z}}$  har vi ytan till vänster, så  $W = +\phi = \pi$ .



**Exempel 2.** Beräkna arbetsintegralen  $W = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  där  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, 0, 0)$  och  $\gamma$  är skärningskurvan mellan paraboloiden  $z = x^2 + y^2$  och planet  $x + z = 1$  taget ett varv i positiv riktning sett ovanifrån (se tidigare exempel).

*Lösning:* Låt  $S$  vara den del av planet  $x + z = 1$  som ligger innanför paraboloiden; då är  $S = \mathbf{r}(D)$  där

$$\mathbf{r}(u, v) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 - u \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2: \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{5}{4} \right\}.$$

Vidare är

$$(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (0, 0, -1).$$

varför

$$\begin{aligned} W &= \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \\ &= \iint_D (\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) \, dudv \iint_D \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, dudv = -A(D) = \\ &= -\frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

Vi kan bekräfta resultatet genom att beräkna arbetet på vanligt sätt:  $\gamma = \mathbf{r}([0, 2\pi[)$  där

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos t \\ \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t \\ 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cos t\right) \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$\begin{aligned} W &= \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{2} \sin t \\ \frac{\sqrt{5}}{2} \cos t \\ \frac{\sqrt{5}}{2} \sin t \end{pmatrix} dt = \\ &= -\frac{5}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -\frac{5}{4} \cdot \pi = -\frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

**Exempel 3.** Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} y \cos x e^{\sin x} \\ e^{\sin x} + ze^y \\ e^y \end{pmatrix}$$

och kurvan  $\gamma = \mathbf{r}([0, 2\pi[)$  där

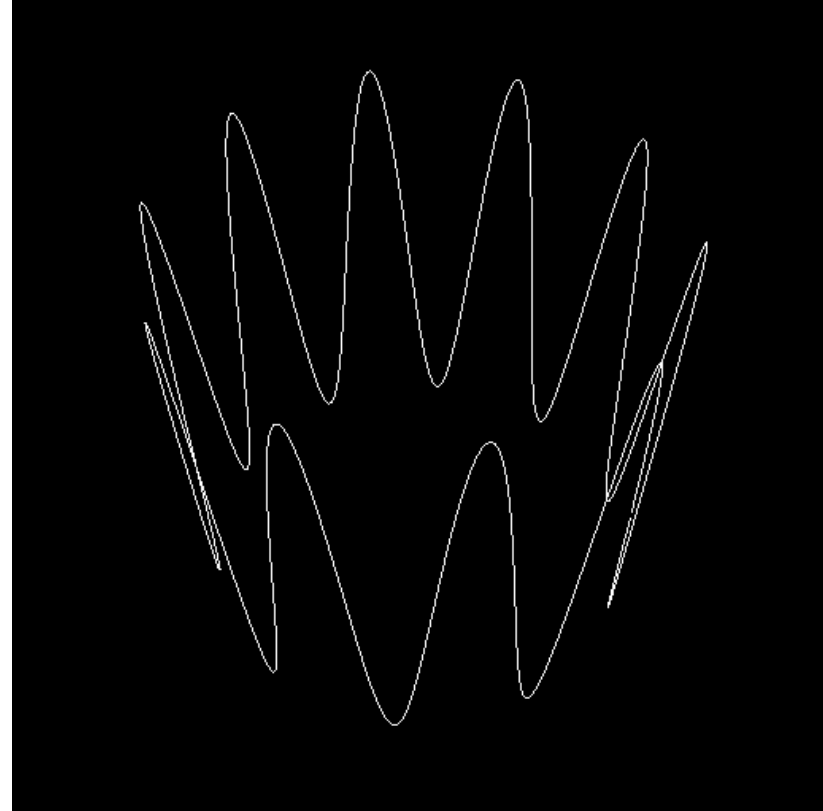
$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin 10t \end{pmatrix}.$$

Vad är  $\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ ? Det är klart att *det existerar* en yta med  $\gamma$  som rand; låt  $S$  vara någon sådan yta. Eftersom

$$(\nabla \times \mathbf{A})(x, y, z) = \mathbf{0}$$

(visa det!) ger Stokes sats att

$$\int_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \pm \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \pm \iint_S 0 dA = \pm 0 = 0.$$



## Potentialfält

Betrakta ett vektorfält  $\mathbf{A}$  i en öppen mängd  $D$  i rummet eller planet. Om det existerar ett skalärfält  $\phi$  [av klassen  $C^1$ ] sådant att  $\mathbf{A} = \nabla\phi$  i hela  $D$  säger vi att  $\mathbf{A}$  är ett *potentialfält* i  $D$ , och att  $\phi$  är *potentialen* till  $\mathbf{A}$ .

Det är mycket enkelt att visa att om  $\mathbf{A} = (P, Q)$  är ett potentialfält i *planet* [med potential av klassen  $C^2$ ] så är

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0.$$

Om  $\mathbf{A}$  är ett potentialfält i *rummet*, så är det lika lätt att visa att

$$\nabla \times \mathbf{A} \equiv \mathbf{0}.$$

Vi kan direkt dra tämligen långtgående slutsatser om hur potentialfält beter sig vad kurvintegraller beträffar med hjälp av Greens och Stokes satser: kurvintegralen längs en sluten och enkel kurva är (ofta) noll (det här gäller **alltid** för potentialfält, men resonemanget som går via Green och Stokes kräver att ett par extra villkor är uppfyllda – vilka?). *Detta är ekvivalent med att kurvintegralen mellan två punkter är oberoende av den precisa vägen mellan punkterna.* (Visa den ekvivalensen!)

Om  $\mathbf{F}$  är ett potentialfält i  $D$  med potentialen  $\phi$  så är

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$$

för varje kurva  $\gamma \subset D$  som går från  $\mathbf{a}$  till  $\mathbf{b}$ .

Det medför också att kurvintegraler av  $\mathbf{F}$  är oberoende av vägen mellan start- och slutpunkt samt att kurvintegralen för varje sluten kurva i  $D$  är noll.

I en sammanhängande öppen mängd i planet/rummet gäller

$$\mathbf{F} = \nabla\phi \text{ är ett potentialfält}$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ är oberoende av vägen}$$

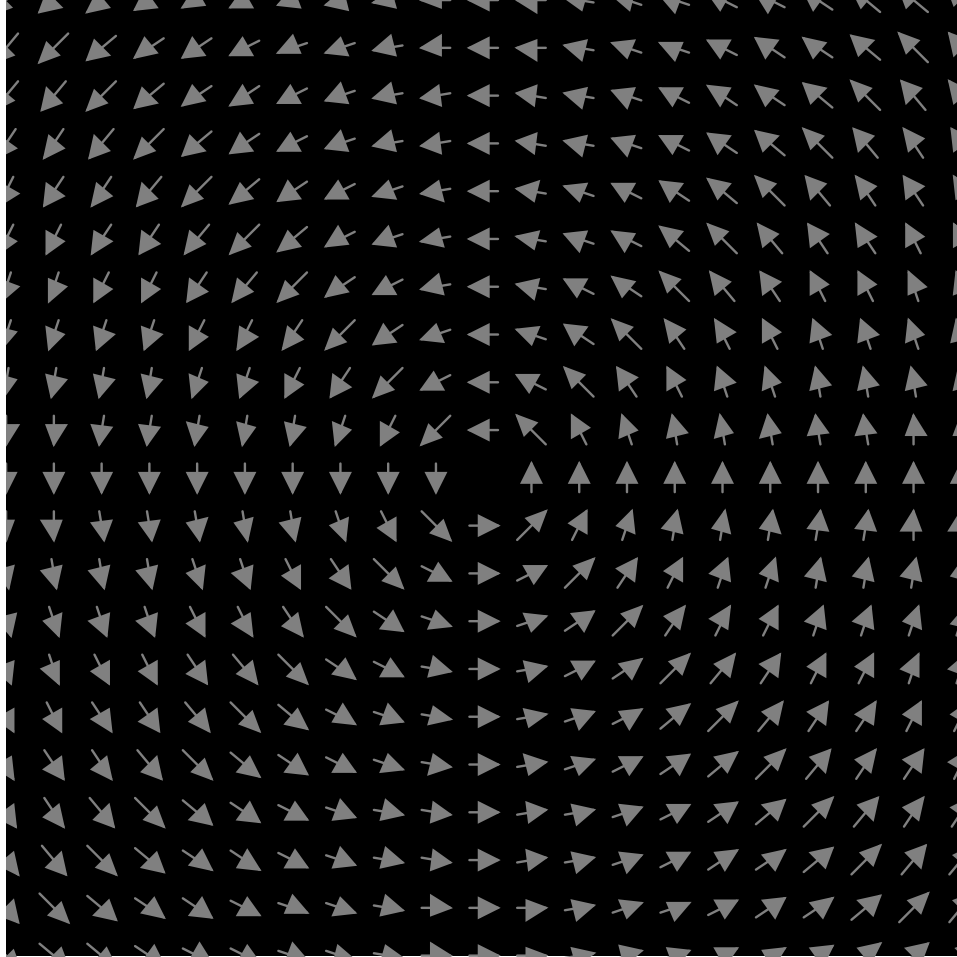
$\Leftrightarrow$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ för varje sluten kurva } \gamma$$

$\Downarrow$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0 \quad (\text{i planet}), \quad \nabla \times \mathbf{F} \equiv \mathbf{0} \quad (\text{i rummet})$$

Om området är **enkelt** sammanhängande gäller även den omvända implikationen nederst.



Är det här fältet ett potentialfält?

**Exempel.** Betrakta gravitationsfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -g\hat{\mathbf{z}}$$

nära jordens yta. En potential är

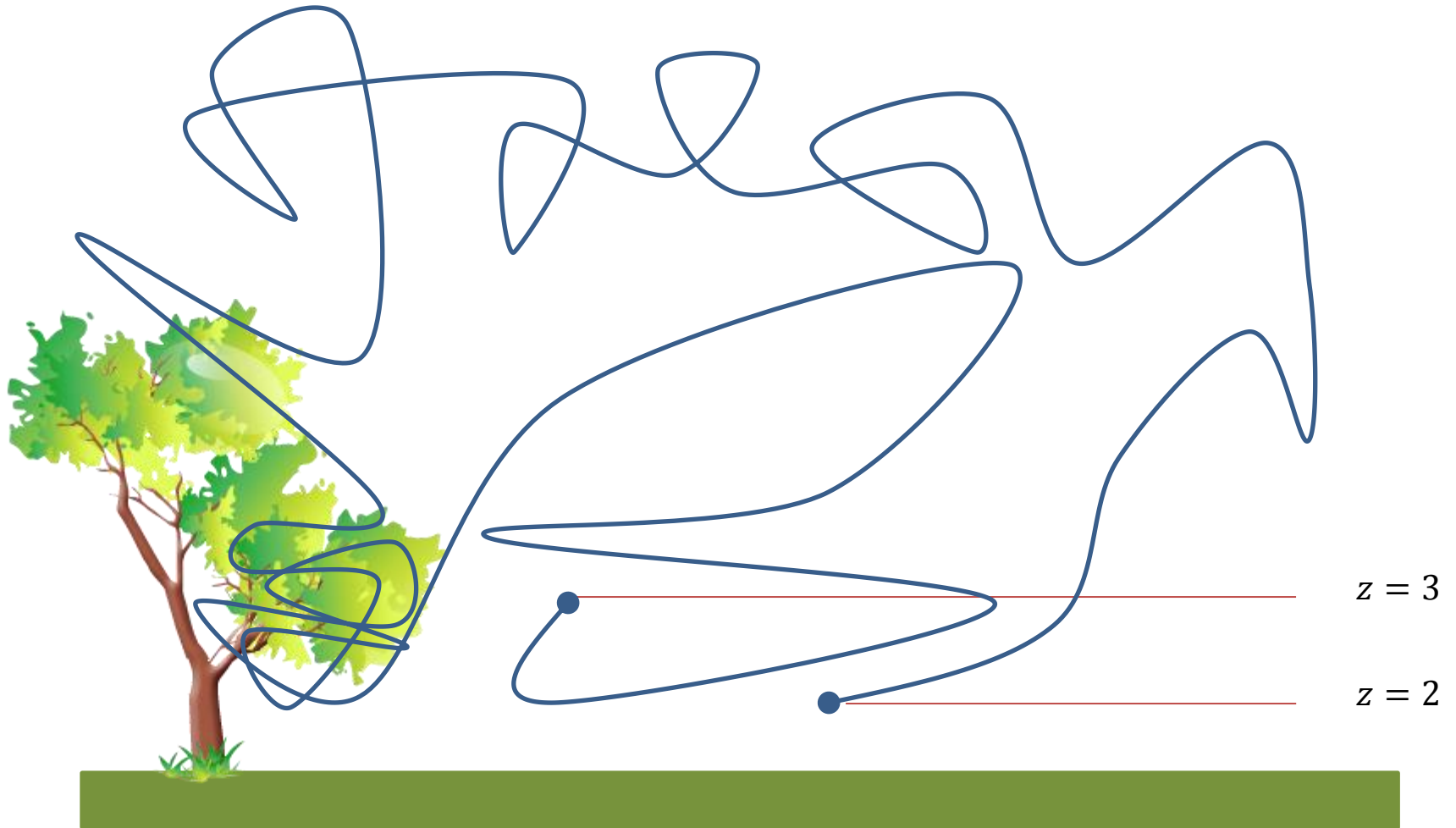
$$\phi(x, y, z) = -gz$$

eftersom  $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$ . Notera att potentialen (som vi vill tolka som den potentiella energin för en kropp med massan 1) *minskar* med ökad höjd över referensnivån  $z = 0$ . Det känns konstigt!

Inom fysiken definierar man potentialen  $\phi$  av  $\mathbf{F}$  via  $\mathbf{F} = -\nabla\phi$  i stället!



**Exempel.** Vilket arbete utför gravitationsfältet på en partikel med massan 1 kg när den rör sig längs kurvan nedan?



**Exempel.** Gravitationsfältet från en punktmassa  $M$  i origo (t.ex. solen) är

$$\mathbf{G}(x, y, z) = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

och har potentialen

$$\phi(x, y, z) = \frac{GM}{r} = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\text{matematik})$$

eller

$$\phi(x, y, z) = -\frac{GM}{r} = -\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\text{fysik}).$$

Det elektrostatiska fältet från en punktladdning  $Q$  i origo är

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

och är alltså identiskt till formen.

**Exempel.** Det magnetiska fältet från en oändligt lång ledare längs  $z$ -axeln i vilken en stationär ström flyter är utanför  $z$ -axeln

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{k}{\rho} \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{k}{x^2 + y^2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Det är lätt att visa att

$$(\nabla \times \mathbf{B})(x, y, z) \equiv \mathbf{0}$$

(gör det!) men trots det är  $\mathbf{B}$  inte ett potentialfält i  $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-axeln}\}$ . Till exempel, om

$$\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

som är  $\gamma = \mathbf{r}([0, 2\pi[)$  där

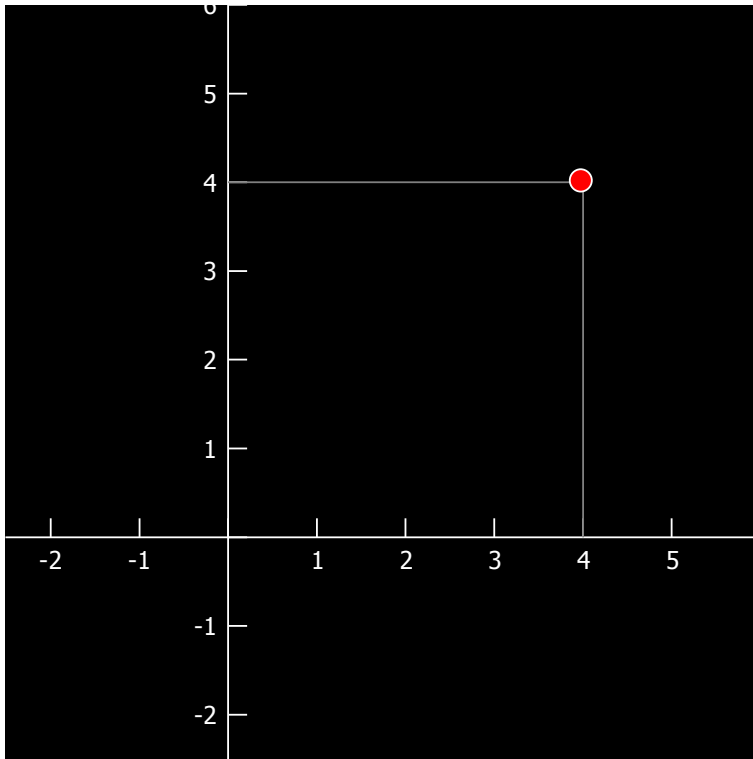
$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

så är

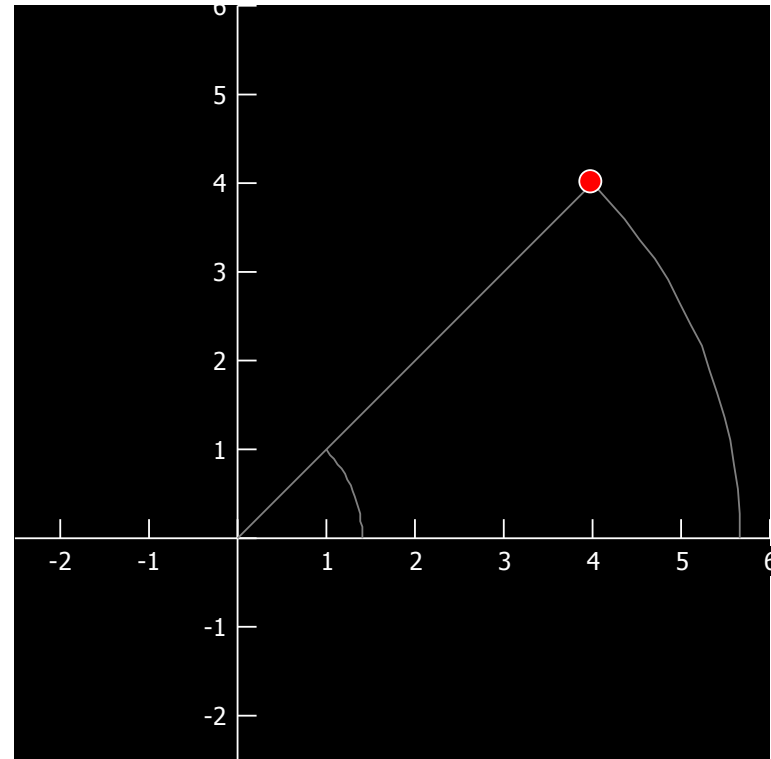
$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{B}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} k \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = k \int_0^{2\pi} dt = \\ &= 2\pi k \neq 0. \end{aligned}$$

## Krokinjiga koordinater

Nu till något mycket enklare. Ett *koordinatsystem* i planet eller rummet är ett sätt att specificera positioner. Det "vanliga" *kartesiska* koordinatsystemet använder två vinkelräta axlar med samma skala för detta ändamål, se bilden till vänster. I det *planpolära koordinatsystemet* anger man i stället dels avståndet till origo, dels vinkeln från positiva  $x$ -axeln, se bild till höger.



$$(x, y) = (4, 4)$$



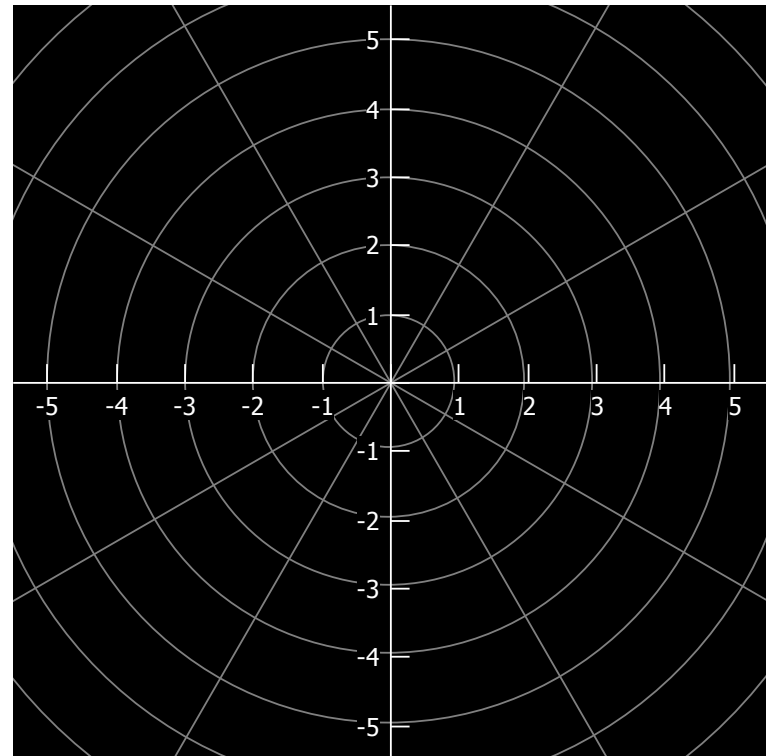
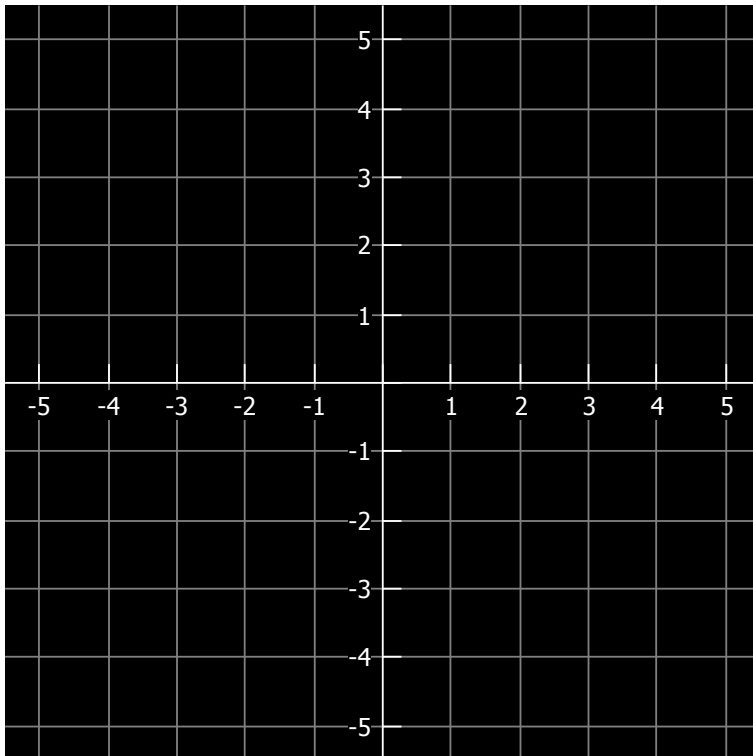
$$(\rho, \varphi) = \left(4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

Sambandet mellan de kartesiska koordinaterna  $(x, y)$  och de planpolära  $(\rho, \varphi)$  för en och samma punkt är

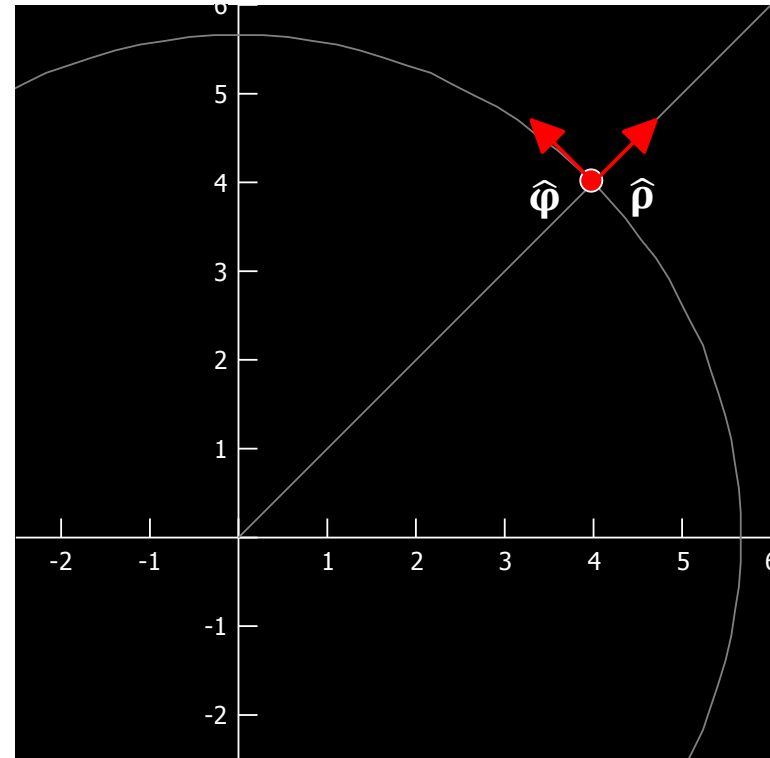
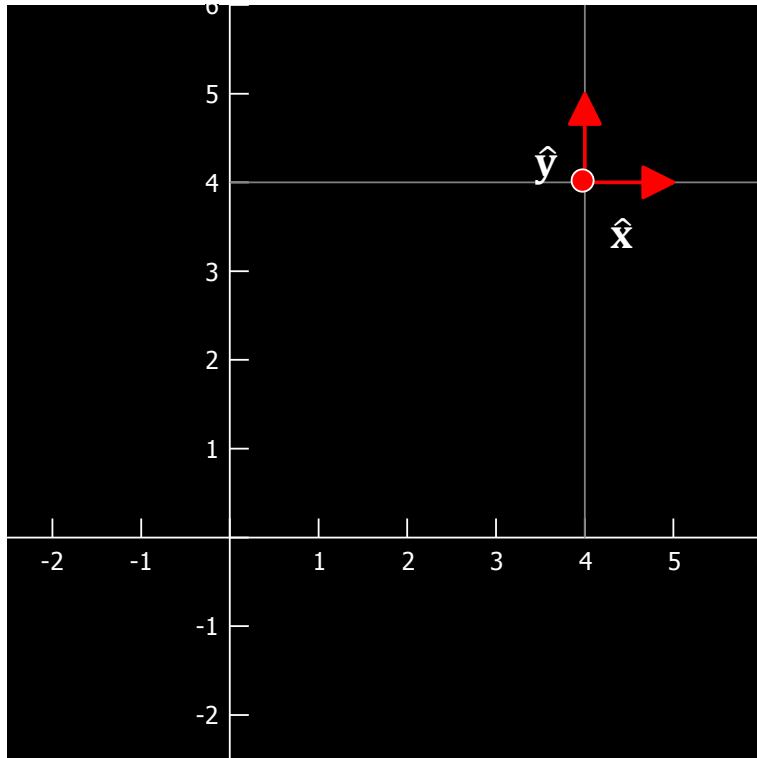
$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi.$$

Om man i ett koordinatsystem i planet sätter ena koordinaten lika med ett fixt tal erhåller man en *koordinatkurva*. Nedan illustreras koordinatkurvorna i både kartesiska och planpolära koordinater.



- Mängden av geometriska vektorer baserade *i en viss punkt* i rummet eller planet kallas för punktens *tangentrum* och är ett vektorrum under de vanliga operationerna.
- Ett koordinatsystem används inte *enbart* för att ange positioner för punkter, utan används också för att ange komponenter för vektorer i varje tangentrum.
- Varje koordinatsystem ger nämligen upphov till en naturlig *bas* i varje tangentrum. Basvektorerna är koordinatkurvornas hastighetsvektorer, fast normerade.



- Medan de kartesiska koordinaternas basvektorer  $\hat{x}$  och  $\hat{y}$  ser likadana ut i varje punkt, så beror de polära koordinaternas basvektorer  $\hat{\rho}$  och  $\hat{\varphi}$  på den aktuella punkten.

**Exempel.** Låt oss bestämma de polära basvektorerna. I planet definieras alltså de polära koordinaterna  $(\rho, \varphi)$  av

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \\y &= \rho \sin \varphi.\end{aligned}$$

Planet kan med andra ord parameteriseras

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Koordinatkurvornas hastighetsvektorer är

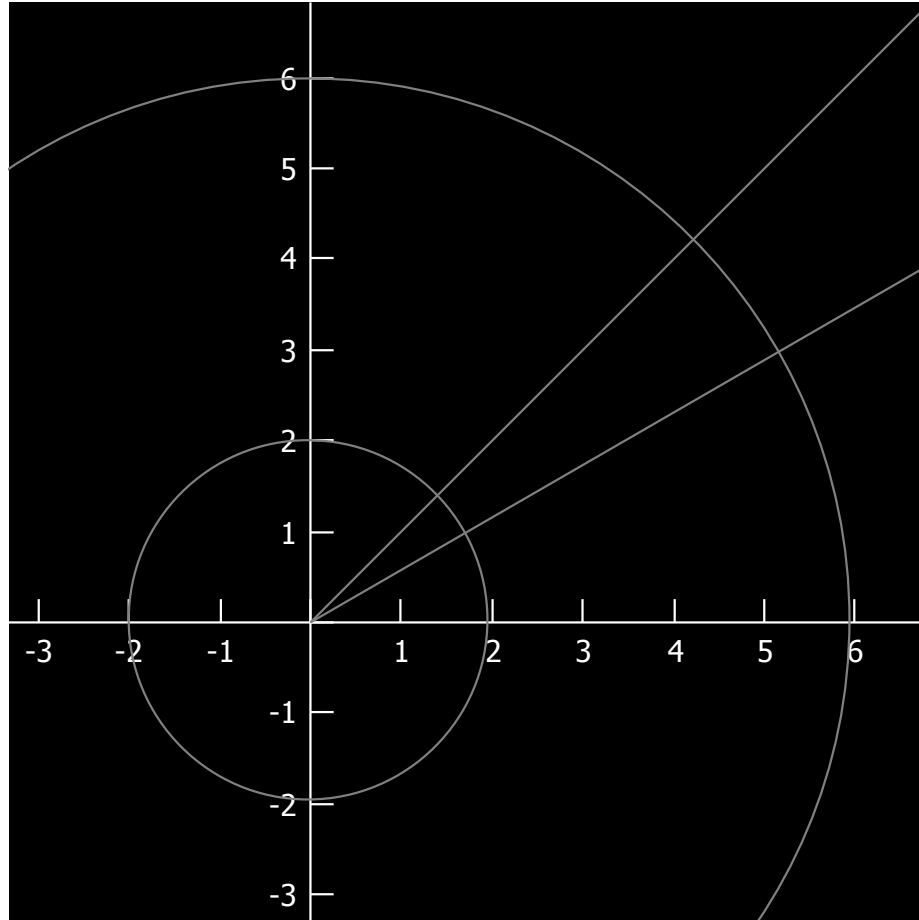
$$\mathbf{r}'_{\rho}(\rho, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}'_{\varphi}(\rho, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \end{pmatrix}$$

med längder  $h_{\rho} := 1$  och  $h_{\varphi} := \rho$ . I tangentrummet till punkten med polära koordinater  $(\rho, \varphi)$  har vi sålunda basvektorerna

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}(\rho, \varphi) = \frac{1}{h_{\rho}} \mathbf{r}'_{\rho}(\rho, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\rho, \varphi) = \frac{1}{h_{\varphi}} \mathbf{r}'_{\varphi}(\rho, \varphi) = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Skalärfälten  $h_{\rho}$  och  $h_{\varphi}$  som dök upp som "biprodukter" kallas för *skalfaktorer* och kommer att vara mycket viktiga framöver! Dessa memoreras!

Notera att den geometriska tolkningen av en skalfaktor till en kroklinjig koordinat är *så långt man förflyttar sig i rummet när koordinaten ökar en enhet* (lokalt, just i den aktuella punkten).





## Koordinatsystem i rummet

Även i rummet brukar man införa nya koordinatsystem, framför allt de sfäriska koordinaterna  $(r, \theta, \varphi)$  och de cylindriska koordinaterna  $(\rho, \varphi, z)$  vilka definieras av

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

respektive

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z.$$

Dessa koordinatsystem bör vara bekanta sedan tidigare. Man bör memorera skalfaktorerna:

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta$$

respektive

$$h_\rho = 1, \quad h_\varphi = r, \quad h_z = 1.$$

Sfäriska koordinater		Cylindriska koordinater	
<i>Koordinatyta</i>	<i>Beskrivning</i>	<i>Koordinatyta</i>	<i>Beskrivning</i>
$r = \text{konst.}$	Sfär kring origo med radie $r$ .	$\rho = \text{konst.}$	Cylinder kring $z$ -axeln med radie $\rho$ .
$\theta = \text{konst.}$	Enkelkon kring $z$ -axeln och spets i origo.	$\varphi = \text{konst.}$	Halvplan med $z$ -axeln som rand.
$\varphi = \text{konst.}$	Halvplan med $z$ -axeln som rand.	$z = \text{konst.}$	Plan parallellt med $xy$ -planet vid höjden $z$ .
<i>Koordinatkurva</i>	<i>Beskrivning</i>	<i>Koordinatkurva</i>	<i>Beskrivning</i>
$r = \text{konst.}$ $\theta = \text{konst.}$	Cirkel runt $z$ -axeln.	$\rho = \text{konst.}$ $\varphi = \text{konst.}$	Rät linje parallell med $z$ -axeln.
$r = \text{konst.}$ $\varphi = \text{konst.}$	Halvcirkel kring origo med ändar på $z$ -axeln.	$\rho = \text{konst.}$ $z = \text{konst.}$	Cirkel runt $z$ -axeln.
$\theta = \text{konst.}$ $\varphi = \text{konst.}$	Stråle (rät linje) från origo.	$\varphi = \text{konst.}$ $z = \text{konst.}$	Stråle (rät linje) från $z$ -axeln, parallell med $xy$ -planet.

Vad är då **poängen** med att införa nya koordinatsystem i planet och rummet, utöver de kartesiska koordinatsystemen? Jo, i tillämpningar med t.ex. sfärisk eller cylindrisk symmetri är ofta sfäriska respektive cylindriska koordinater mycket behändigare.

Jämför t.ex. gravitationsfältets kartesiska uttryck

$$\mathbf{G}(x, y, z) = -\frac{GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

med dess sfäriska uttryck

$$\mathbf{G}(r, \theta, \varphi) = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Eller betrakta det magnetiska fältet kring en ledare i vilken en stationär ström flyter:

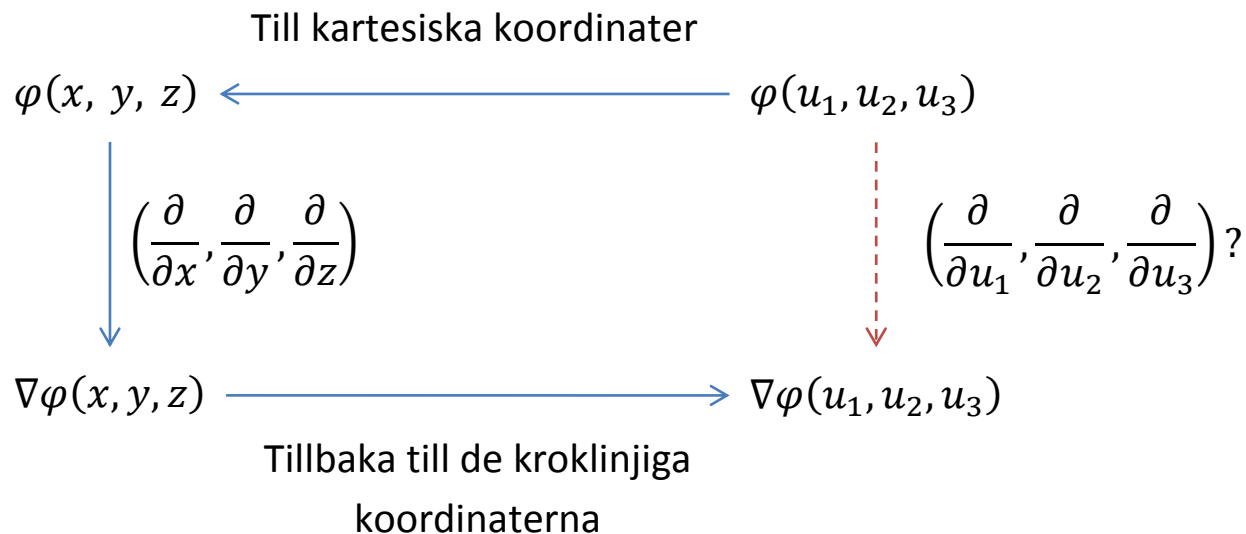
$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2} \mathbf{e} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix},$$

att jämföra med

$$\mathbf{B}(\rho, \varphi, z) = \frac{k}{\rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}}.$$

## Differentialoperatorer i kroklinjiga koordinater

Givet ett skalärfält uttryckt i kroklinjiga koordinater kan vi förstås "översätta" till motsvarande uttryck i kartesiska koordinater. Sedan kan vi beräkna skalärfältets gradient på vanligt sätt. Det erhållna vektorfältet kan sedan översättas tillbaka till de kroklinjiga koordinaterna. Får man samma sak om man försöker beräkna gradienten direkt i det kroklinjiga koordinatsystemet, om man använder den vanliga formeln för gradienten?



Svaret är i allmänhet "nej".

## Differentialoperatorer i kroklinjiga koordinater

Låt  $(u_1, u_2, u_3)$  vara koordinaterna i ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem med skal-faktorer  $h_1, h_2, h_3$ . Då är gradienten

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \hat{\mathbf{u}}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial u_2} \hat{\mathbf{u}}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial u_3} \hat{\mathbf{u}}_3$$

för varje skalärfält  $\phi$ , och för varje vektorfält  $\mathbf{A} = A_1 \hat{\mathbf{u}}_1 + A_2 \hat{\mathbf{u}}_2 + A_3 \hat{\mathbf{u}}_3$  är divergensen

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 A_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

och rotationen

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{\mathbf{u}}_1 & h_2 \hat{\mathbf{u}}_2 & h_3 \hat{\mathbf{u}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}.$$

Notera att alla punkter anges i de kroklinjiga koordinaterna, och alla vektorkomponenter är givna relativt den bas i varje tangentrum vilken ges av det kroklinjiga koordinatsystemet.

**Exempel.** Betrakta det elektriska fältet

$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

från en punktladdning  $Q$  i origo. Beräkna flödet av  $\mathbf{E}$  ut genom en sfär  $S$  kring origo med radien  $R$ .

*Lösning:* Vi kommer nu att integrera över en *koordinatyta*, nämligen  $r = R$ , med skalfaktorerna  $h_\theta = r$  och  $h_\varphi = r \sin \theta$ . Därför är areaelementet  $dA = h_\theta h_\varphi d\theta d\varphi = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  så att det sökta flödet

$$\begin{aligned} \phi &= \iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \iint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}, \end{aligned}$$

ett standardresultat inom elektromagnetismen (som också motiverar valet av  $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$ ).

**Exempel.** Visa att flödet av

$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

genom *varje* slutna yta som innehåller origo är  $Q/\epsilon_0$ .

*Lösning:* Divergensen

$$(\nabla \cdot \mathbf{E})(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot r^2 \sin \theta \right) \right) = 0.$$

Det önskade resultatet följer nu av föregående exempel och Gauss sats (hur?).