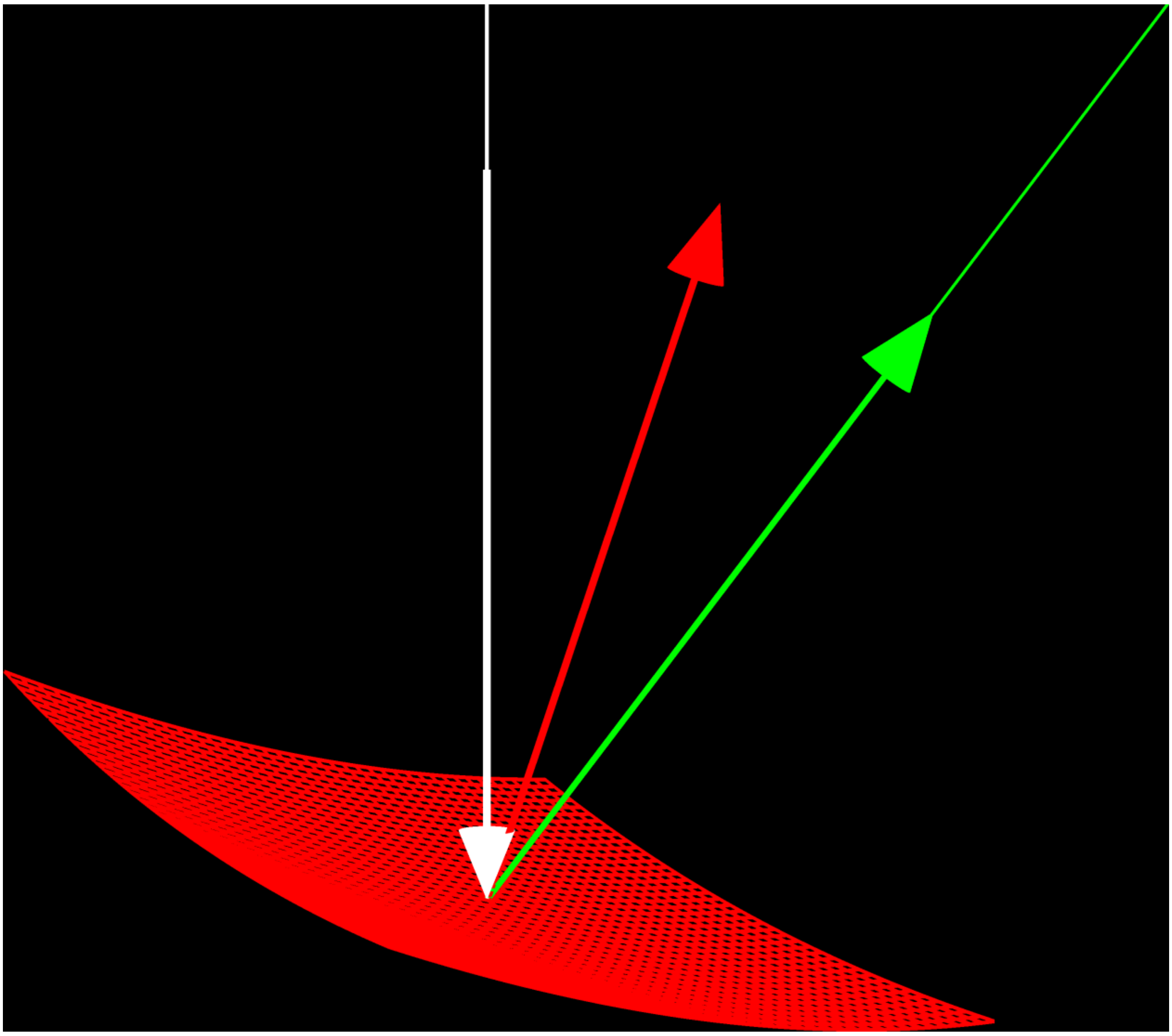
Bestämning av reflektionsstrålen

Hur fungerar spegelsimulatorn, d.v.s. hur beräknas riktningen hos de reflekterade strålarna?

Situationen är följande: vi har en given yta $S \subset \mathbb{R}^3$ och en given punkt $P \in S$. Mot denna punkt infaller en ljusstråle, den inkommande strålen, med given normerad riktningsvektor $\hat{\mathbf{i}}$. Denna stråle reflekteras, och problemet består i att beräkna (den normerade) riktningsvektorn $\hat{\mathbf{r}}$ för den reflekterade stålen, som alltså kan parametriseras $P + t\hat{\mathbf{r}}$ med $t \geq 0$.

Den fysikaliska lag som är relevant här är reflektionslagen, som säger (1) att den inkommande strålen, ytans normal i punkten och den reflekterade strålen ligger i samma plan samt (2) att vinkeln mellan den inkommande strålen och normalen (infallsvinkeln) är lika stor som vinkeln mellan normalen och den reflekterade strålen (reflektionsvinkeln).

I bilden nedan är den inkommande strålen vit, liksom dess normerade riktningsvektor $\hat{\mathbf{i}}$ som pekar mot P; normallinjen är röd, liksom den utåtpekande enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}}$. Den sökta reflekterade strålen är grön, liksom dess sökta normerade riktningsvektor $\hat{\mathbf{r}}$.



Hur bestämmer vi $\hat{\mathbf{r}}$ givet $\hat{\mathbf{i}}$ och $\hat{\mathbf{n}}$?

Först bestämmer vi (ortogonal)projektionen $\mathbf{p}$ av $\hat{\mathbf{i}}$ på $\hat{\mathbf{n}}$; den är

$$\mathbf{p} = \langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \hat{\mathbf{n}}.$$

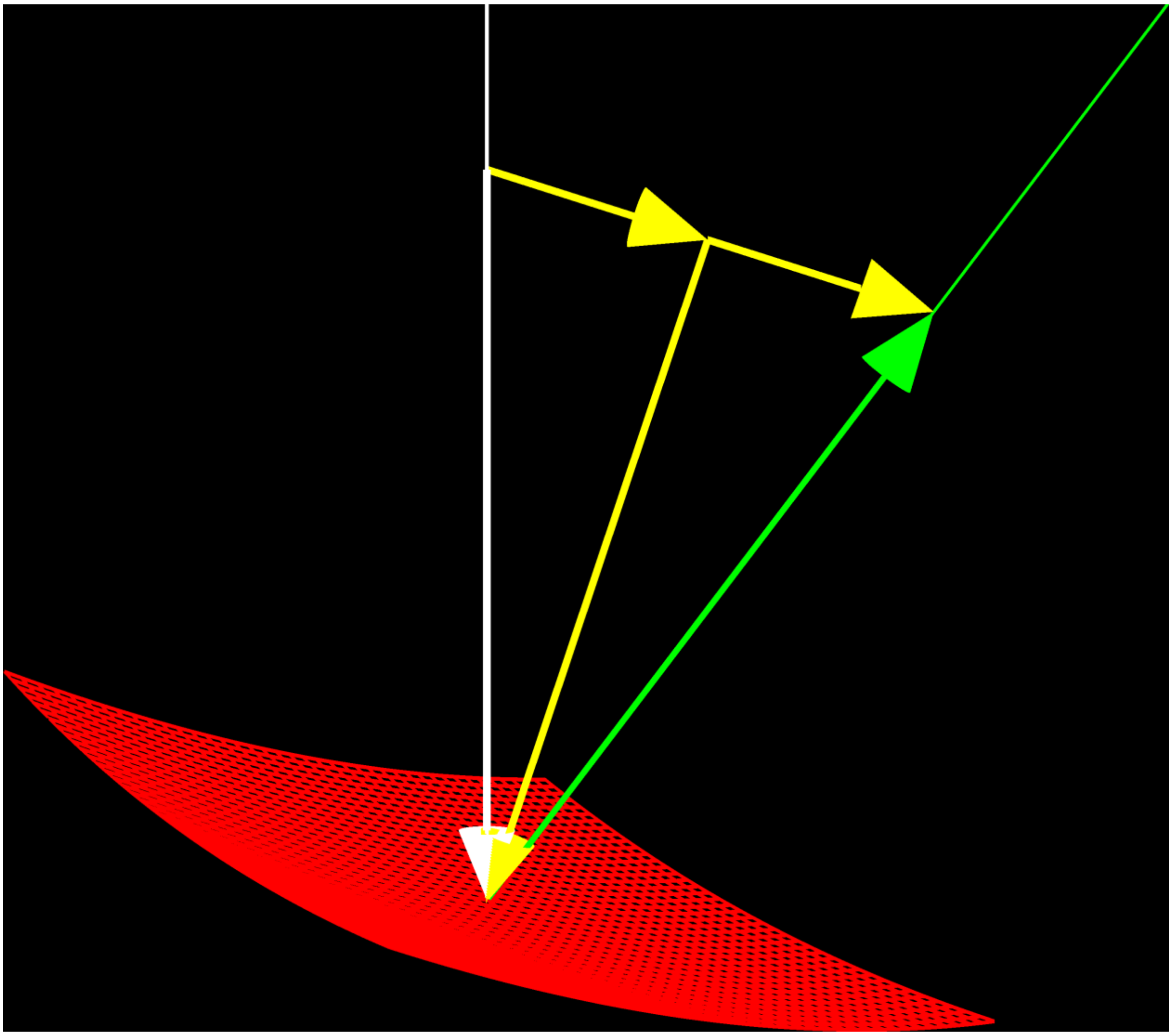
Vi söker nu den vektor $\mathbf{x}$ som går från början av $\hat{\mathbf{i}}$ till normallinjen och som är vinkelrät mot normallinjen (rita!). Tydligen är $\mathbf{x} + \mathbf{p} = \hat{\mathbf{i}}$ varför

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{i}} - \mathbf{p} = \hat{\mathbf{i}} - \langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \hat{\mathbf{n}}.$$

Vi hävdar nu att

$$\hat{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\mathbf{x} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{i}} - 2\langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{i}} - 2\langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \hat{\mathbf{n}},$$

enligt bilden nedan, där $\mathbf{p}$ och $\mathbf{x}$ är gula.



För det första ser vi nämligen att $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}} - 2\langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \hat{\mathbf{n}}$ är en linjärkombination av $\hat{\mathbf{i}}$ och $\hat{\mathbf{n}}$, så att $\hat{\mathbf{r}}$ ligger i det plan som spänns upp av $\hat{\mathbf{i}}$ och $\hat{\mathbf{n}}$. Att sedan infallsvinkeln är lika med reflektionsvinkeln följer direkt av geometrin, med tanke på den likbenta triangel som uppenbarar sig och som består av två *kongruenta* rätvinkliga trianglar. (Att de två rätvinkliga trianglarna är kongruenta följer av att de gula sidorna intill de räta vinklarna parvis är lika stora i båda trianglarna och det faktum att de är kongruenta medför i sin tur direkt att deras spetiga vinklar, d.v.s. infallsvinkeln och

reflektionsvinkeln, är lika stora. Samtidigt följer att $|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{r}}|$. Det senare faktumet, d.v.s. att den stora triangeln är likbent, följer också av Pythagoras sats applicerad i de två rätvinkliga trianglarna.)
Sålunda är $\hat{\mathbf{r}}$ en riktningsvektor för den reflekterade strålen, enligt reflektionslagen.

Men $\hat{\mathbf{r}}$ är inte bara *en* riktningsvektor, utan den utlovade *normerade* riktningsvektorn, eftersom $|\hat{\mathbf{r}}| = |\hat{\mathbf{i}}| = 1$.

Som en övning i vektoralgebra kan vi utföra några kontroller:

$$\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\hat{\mathbf{i}} - \langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle - \langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle |\hat{\mathbf{n}}|^2 = 0,$$

$$|\hat{\mathbf{r}}|^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (\hat{\mathbf{i}} - 2\langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \hat{\mathbf{n}})^2 = |\hat{\mathbf{i}}|^2 - 4\langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle^2 + 4\langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle^2 |\mathbf{n}|^2 = 1 \text{ och}$$

$$\langle \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle = (\hat{\mathbf{i}} - 2\langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle - 2\langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle |\hat{\mathbf{n}}|^2 = -\langle \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle = \langle -\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle$$

vilket visar att $\mathbf{x} \perp \hat{\mathbf{n}}$, $|\hat{\mathbf{r}}| = 1$ och $\angle(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{n}}) = \angle(-\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{n}})$ som förväntat.