De hyperboliska funktionerna

Bredvidläsning till matematisk grundkurs
och envariabelanalys

Andreas Rejbrand, maj 2011.

1 Inledning

Det här kompendiet är tänkt att används som bredvidläsning till de inledande kurserna i matematik på högskolenivå, såsom en grundkurs i matematik och inledande kurser i envariabelanalys. Ämnet är de *hyperboliska funktionerna*, som är nära besläktade med de trigonometriska funktionerna sin, cos, tan, …, och som är inte sällan dyker upp i tillämpningar, men som ofta tas upp högst perifert (om alls) i grundläggande matematikkurser. Varje avsnitt inleds med en kort beskrivning de förkunskaper som krävs för att läsaren skall kunna ta till sig avsnittet. Många avsnitt avslutas med övningsuppgifter. Dessa kan vara märkta med noll, en eller två stjärnor. De uppgifter som saknar stjärnmarkering betraktas som enkla och bör inte vara svåra att lösa; läsaren rekommenderas att lösa samtliga dessa uppgifter. Uppgifter markerade med en stjärna (”⋆”) är ibland – men inte nödvändigtvis – något svårare, och uppgifter markerade med två stjärnor (”⋆⋆”) är till för de allra mest motiverade studenterna. Förvisso är alla dessa uppgifter fullt lösbara och egentligen inte ”svåra”, men de tenderar att involvera många steg.

2 Bakgrund, definition och räknelagar

Förkunskaper: Funktioner, trigonometriska funktioner, komplexa tal, Eulers formler

2.1 De trigonometriska funktionerna

De trigonometriska funktionerna sin och cos definieras med hjälp av enhetscirkeln. När detta är gjort definieras

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{(tangens)}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \text{(cotangens)}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{(sekant/en/)}$$
$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \qquad \text{(cosekant/en/)}$$

där de två sista är ovanliga i svenskspråkig litteratur. Alla dessa funktioner är periodiska, och därmed inte injektiva; ingen av dem har alltså någon invers. Om man skapar lämpliga *restriktioner*[1] av de trigonometriska funktionerna, däremot, så får man injektiva funktioner. Vi väljer restriktionernas definitionsmängder så att restriktionerna blir injektiva, men ändå har samma värdemängd som den ursprungliga funktionen. Detta bestämmer förstås inte restriktionen unikt, utan det är konvention som säger att vi använder de definitionsmängder som vi gör. Till exempel definieras arcsin som inversen till (den injektiva!) funktionen $f: x \mapsto \sin x$ med $D_f = [-\pi/2, \pi/2]$, d.v.s.

$$x = \arcsin y \Leftrightarrow \sin x = y \quad \text{och} \quad x \in [-\pi/2, \pi/2].$$

$\arcsin(y)$ är alltså *en* av alla de vinklar för vilka sinus är y, närmare bestämt den vinkel som ligger i $[-\pi/2, \pi/2]$. På liknande sätt definieras de övriga ”inversa” trigonometriska funktionerna: arccos, arctan, arccot, arcsec och arccsc. Definitionsmängderna för de restriktioner vi använder för att definiera dessa inverser anges i tabellen nedan.

Tabell 1: Trigonometriska funktioner och inverser till restriktioner

Trigonometrisk funktion	Invers till restriktion	Restriktionens definitionsmängd[2]
sin	arcsin	$[-\pi/2, \pi/2]$
cos	arccos	$[0, \pi]$
tan	arctan	$]-\pi/2, \pi/2[$
cot	arccot	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$
sec	arcsec	$[0, \pi] \setminus \{\pi/2\}$
csc	arccsc	$[-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$

Åtminstone de tre första raderna bör man memorera. Prefixet ”arc-” betyder (förstås) ”båge”. Arcsin och arccos ger ju ifrån sig *vinklar* i enhetscirkeln, men eftersom enhetscirkeln har radie 1 så gäller att vinkeln är lika med båglängden (längs enhetscirkeln). Det är alltså ”naturligt” att påstå att arcsin och

[1] Låt f vara en funktion med definitionsmängd D_f. Med en *restriktion* till f menas en funktion g med en (normalt sett mindre) definitionsmängd $D_g \subseteq D_f$ sådan att $g(x) = f(x), \forall x \in D_g$. g säges också vara *restriktionen av f till D_g*.

[2] Alla författare är inte överens om vilket område vi skall begränsa oss till i fallet med cotangens. Det huvudsakliga alternativet till $]-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$ är $]0, \pi[$.

arccos ger ifrån sig båglängder. Den här geometriska tolkningen är inte alls lika tydlig i de övriga fallen; till exempel är det lite tveksamt om det är ”naturligt” att tolka värdet som arcsec ger ifrån sig som en båglängd. Trots detta betecknas funktionen vanligtvis ”arcsec”, med prefixet ”arc-”. Prefixet ”arc-” bör alltså snarast tolkas som ”invers” [till lämplig restriktion] när det förekommer i dessa funktionsnamn.

Övningar

1. Motivera de restriktioner som anges i Tabell 1 genom att studera graferna till de trigonometriska funktionerna. Betrakta i synnerhet fallet med cotangens där det i litteraturen förekommer två olika val.

2.2 De hyperboliska funktionerna

Sedan gymnasiet är alla bekanta med den reella exponentialfunktionen, med definitionsmängd $D_{\exp} = \mathbb{R}$ och värdemängd $V_{\exp} =]0, \infty[$. Om inte förr, så utvidgas sedan på högskolan exponentialfunktionen till en funktion definierad för alla komplexa tal $z = a + bi \in \mathbb{C}$ genom

$$\exp(a + bi) \coloneqq \exp(a)\,(\cos b + i \sin b)$$

där högerledet är väldefinierat sedan tidigare eftersom $a, b \in \mathbb{R}$. I stället för $\exp(z)$ skriver vi ofta e^z, precis som vi gör med den reella exponentialfunktionen. Den komplexa exponentialfunktionen är tydligen en funktion från hela $\mathbb{C}$ till $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Restriktionen av den komplexa exponentialfunktionen till de reella talen [sätt $b = 0$] är den gamla vanliga exponentialfunktionen, som sig bör. En *konsekvens* av definitionen av den komplexa exponentialfunktionen är Eulers formler

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

som gäller för varje *reellt* tal x. Inspirerade av detta gör vi

Definition 1

De *hyperboliska funktionerna* är

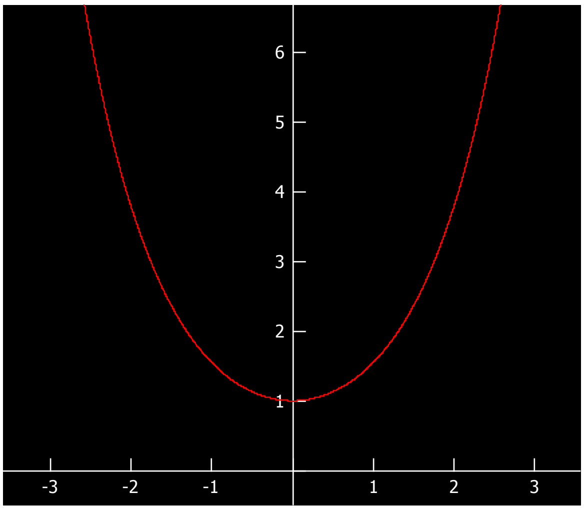
$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

och

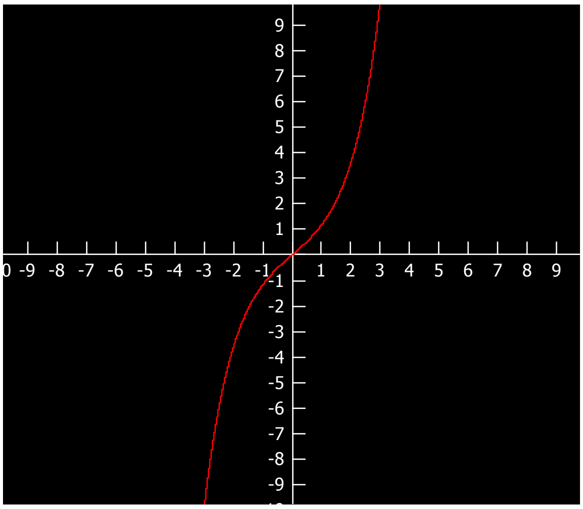
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}.$$

Dessa funktioner uttalas ”sinus hyperbolicus”, ”cosinus hyperbolicus”, ”tangens hyperbolicus”, osv. Notera att alla dessa funktioner är reella; de tar in reella tal, och ger ifrån sig reella tal. Graferna till de hyperboliska funktionerna visas nedan. Notera att samtliga funktioner är definierade på hela $\mathbb{R}$ förutom de funktioner (coth och csch) som är omvänt proportionella mot sinus hyperbolicus, vilka förstås inte är definierade i origo, där sinus hyperbolicus har sitt nollställe.

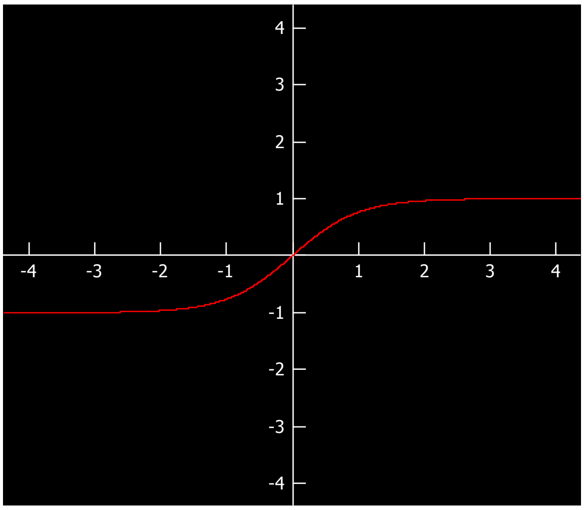
Tabell 2 Graferna till de hyperboliska funktionerna



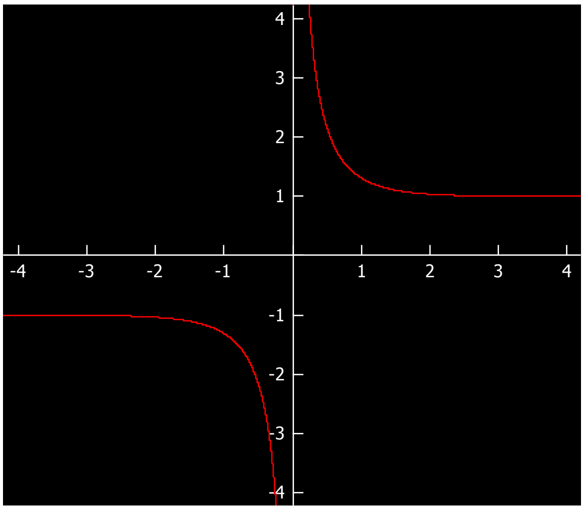
$y = \cosh x$



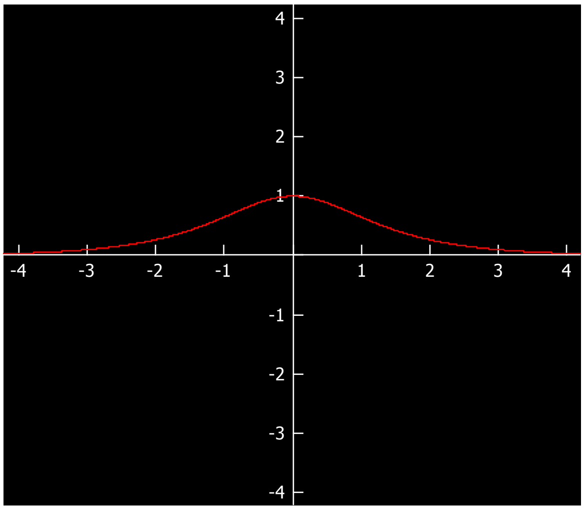
$y = \sinh x$



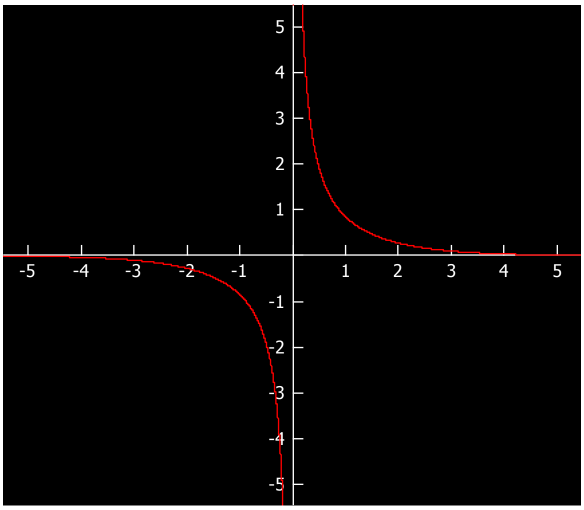
$y = \tanh x$



$y = \coth x$



$y = \operatorname{sech} x$



$y = \operatorname{csch} x$

Övningar

1. Visa Eulers formler.

2.3 Räknelagar

Med tanke på att de hyperboliska funktionerna definierats med inspiration av Eulers formler för de vanliga trigonometriska funktionerna, är det inte konstigt att många av de räknelagar som gäller för de hyperboliska funktionerna påminner om trigonometriska lagar. Vi har

Sats 2

För alla reella tal a, b och x gäller

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(b) $\sinh(a \pm b) = \sinh a \cosh b \pm \cosh a \sinh b$

(c) $\cosh(a \pm b) = \cosh a \cosh b \pm \sinh a \sinh b$

(d) $\tanh(a + b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \cdot \tanh b}$

(e) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

(f) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$.

Bevis

(a): Direkt beräkning ger

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

(b): Vi har

$$\sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b = \frac{e^a - e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2} =$$
$$= \frac{e^{a+b} + e^{a-b} - e^{-a+b} - e^{-a-b}}{4} + \frac{e^{a+b} - e^{a-b} + e^{-a+b} - e^{-a-b}}{4} =$$
$$= \frac{2e^{a+b} - 2e^{-a-b}}{4} = \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{2} = \sinh(a+b)$$

och liknande i fallet $\sinh(a-b)$.

(c)–(f) lämnas som övning. ■

Notera att (a) svarar mot ”trigonometriska ettan”. Men i stället för $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ har vi nu $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. (b) och (c) ser nästan likadana ut som i det trigonometriska fallet; enda skillnaden är att summaformeln för cosinus hyperbolicus *inte* vänder på tecknet i andra ledet. Även i (d) skiljer sig den hyperboliska formeln från den trigonometriska med ett tecken; i det trigonometriska fallet är det ett minustecken i nämnaren i stället för plustecknet. (e) är identisk med motsvarande trigonometriska formel, medan (f) skiljer på ett tecken; den trigonometriska formeln är ju $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Övningar

1. Visa att $\cosh x \pm \sinh x = e^{\pm x}$ för alla $x \in \mathbb{R}$.
2. Visa identiteterna (c)-(f) i Sats 2.
3. Visa att cosinus hyperbolicus är en jämn funktion. Visa att sinus hyperbolicus är en udda funktion.
4. Använd föregående uppgift för att blixtsnabbt ange pariteterna (jämn/udda) för tanh, coth, sech och csch.

3 Ellipser och hyperbler

Enhetscirkeln har som bekant ekvationen

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{1}$$

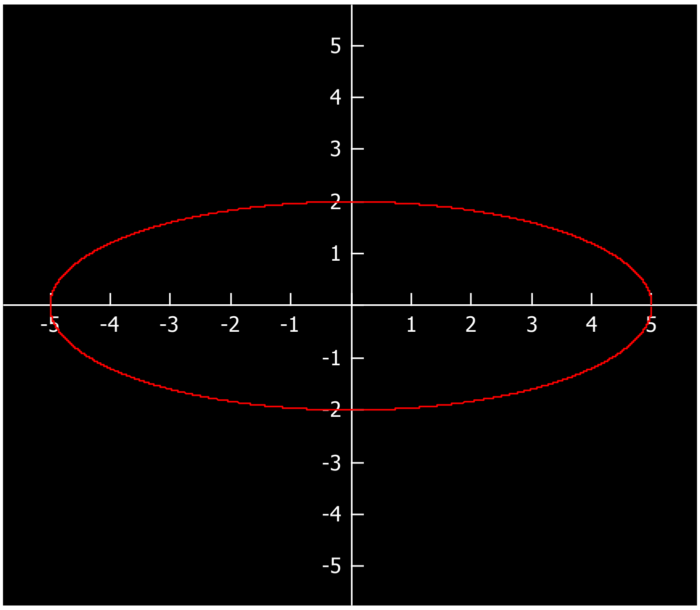
d.v.s. enhetscirkeln är mängden av punkter (x, y) i planet vilka uppfyller (1). Mer allmänt är

$$x^2 + y^2 = r^2$$

en cirkel med radie $r > 0$ och

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

en ellips vars halvaxlar är parallella med koordinataxlarna och har längderna $a > 0$ (i x-led) respektive $b > 0$ (i y-led).



Ellipsen $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$

Enhetscirkeln kan också skrivas på *parameterform*, med hjälp av de (vanliga) trigonometriska funktionerna. Mer precist är

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned} \tag{2}$$

där $t \in [0, 2\pi[$ enhetscirkeln på parameterform. Detta skall tolkas som att (2) är en *funktion* som till varje $t \in [0, 2\pi[$ ordnar en punkt (x, y) i planet, och att själva cirkeln är *värdemängden* till denna funktion. Något mer allmänt är

$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \end{aligned}$$

en cirkel med radie r på parameterform, och

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned}$$

en ellips med halvaxlar parallella med koordinataxlarna och med halvaxellängderna a och b.

Att vi kan använda de trigonometriska funktionerna för att parametrisera cirklar och ellipser följer i princip omedelbart från definitionen av sinus och cosinus med enhetscirkeln. Man kan också notera att

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t = r^2$$

tack vare trigonometriska ettan. Mer allmänt är av samma anledning

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

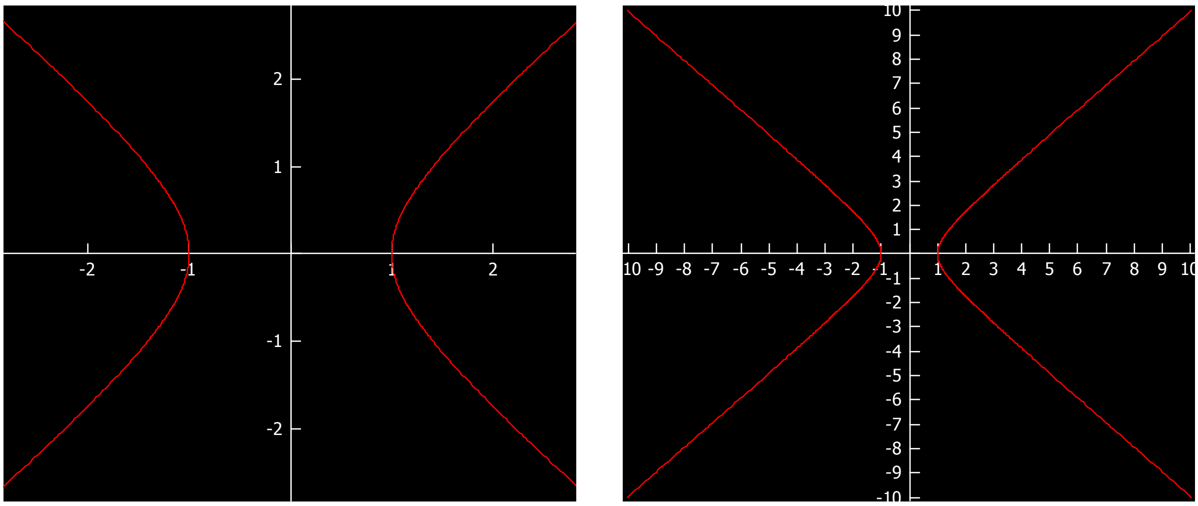
En godtycklig punkt på parameterkurvan uppfyller alltså cirkelns (eller ellipsens) ekvation. Parameterkurvorna är med andra ord verkligen cirklar och ellipser, och detta är tydligen en direkt följd av den trigonometriska ettan.

3.1 Hyperbler

Kurvan

$$x^2 - y^2 = 1 \tag{3}$$

är ett exempel på en *hyperbel*.



Hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$

Notera att om (x_0, y_0) är en punkt på hyperbeln, d.v.s. om (x_0, y_0) uppfyller (3), så gör även $(-x_0, y_0)$ det. Alltså är hyperbeln symmetrisk kring y-axeln. På samma sätt ser vi att hyperbeln är symmetrisk kring x-axeln. Vi noterar också att om (x, y) tillhör hyperbeln och om $|x|$ är stor, så måste även $|y|$ vara stor, så att differensen blir 1. För stora $|x|$ och $|y|$ är hyperbelns ekvation väldigt lik $x^2 - y^2 = 0$, d.v.s. $|x| = |y|$, eller $y = \pm x$. Ju längre ifrån origo vi betraktar hyperbeln ter den sig sålunda alltmer som de två räta linjerna $y = \pm x$. Vi säger att dessa två linjer är (sneda) *asymptoter* till hyperbeln; vi kommer att motivera detta mer precist i ett senare avsnitt.

De hyperboliska funktionerna

Precis som ellipser kan parametriseras med cosinus och sinus, så kan hyperbler parametriseras med cosinus och sinus *hyperbolicus*. Hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$ kan parametriseras[3]

$$x = \cosh t$$
$$y = \sinh t.$$

Riktigheten i denna parametrisering framgår av att

$$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases} \Rightarrow x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Vi kan alltså konstatera att

De hyperboliska funktionerna är för hyperbler vad de trigonometriska funktionerna är för ellipser!

($\star$) Notera också att vi skulle kunna använda ”enhetshyperbeln” $x^2 - y^2 = 1$ för att *definiera* sinus och cosinus hyperbolicus, på samma sätt som vi använder enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ för att definiera sinus och cosinus. Om vi skulle göra på det sättet skulle vi sedan kunna *bevisa* att sinus och cosinus hyperbolicus faktiskt är lika med de välkända linjärkombinationerna av $e^{\pm x}$.

Låt oss lite kort smaka på detta förfarande. Kom ihåg att $\cos(t)$ definieras som x-koordinaten för skärningspunkten mellan enhetscirkeln och den stråle (räta linje) som utgår från origo och är vriden en vinkel t radianer från positiva x-axeln. $\sin(t)$ definieras som y-koordinaten för samma punkt. Vi skulle nu kunna definiera $\cosh t$ (eller $\sinh t$) som x-koordinaten (resp. y-koordinaten) för skärningspunkten mellan (högra komponenten av) enhetshyperbeln och den stråle (räta linje) som utgår från origo och vars lutning på något sätt beror på t. Vi kan däremot inte tolka t som vinkeln från x-axeln, bland annat eftersom denna vinkel ju aldrig kan överstiga $\frac{\pi}{4}$, trots att t ska kunna bli hur stor som helst. För att fulländа analogin behöver vi alltså införa någon slags ”hyperbolisk vinkel” som är sådan att den hyperboliska vinkeln går mot oändligheten när motsvarande ”verkliga” vinkel går mot $\frac{\pi}{4}$. Vi kommer senare att se att vi (nästan) kan tolka t som ett mått på *arean* som begränsas av x-axeln, strålen från origo, och hyperbeln.

Övningar

1. Betrakta den mer allmänna hyperbeln $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Förklara vilken geometrisk tolkning konstanten a har.
2. ($\star$) Vilken geometrisk tolkning har konstanten b i hyperbeln i föregående uppgift?
3. Ange parameterformen av hyperbeln $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.
4. ($\star$) Kurvan $y = \frac{1}{x}$ är också en hyperbel. Motivera varför den måste vara det!
5. Är $x = \frac{1}{y}$ en hyperbel?

[3] Parametriseringen ger bara den högra komponenten av hyperbeln, d.v.s. den del av $x^2 - y^2 = 1$ som ligger i det högra halvplanet $x > 0$.

3.2 Ellipser och hyperbler i fysiken

Ellipser och hyperbler är båda mycket viktiga klasser av kurvor. Inte minst i fysiken spelar dessa kurvor en oerhört fundamental roll. Planetbanor är ellipser – jorden går i en elliptisk bana kring solen [med solen i ena s.k. brännpunkten], liksom alla de andra planeterna i vårt solsystem, och så är det i alla planetsystem.[4] Det är icke-trivialt men fullt möjligt att matematiskt visa att massiv kropp (t.ex. en planet) som rör sig i bana kring en fix, tung, massa, rör sig i en elliptisk bana med den fixa massan i ena brännpunkten. De enda ingredienserna som krävs är Newtons tre lagar och Newtons gravitationslag [och en massa matematisk räknefärdighet].

Betrakta nu i stället en asteroid som kommer från fjärran och färdas i riktning mot vårt solsystem. Innan den kommer i närheten av solsystemet, när den fortfarande befinner sig i den interstellära rymden, påverkades den (i stort sett) inte av några krafter alls, så den rör sig längs en rät linje. När asteroiden sedan kommer nära solen (som ju ensam utgör nästan all massa i solsystemet) känner den av solens dragningskraft, och asteroidens bana böjs av – asteroiden ”slungas” runt solen. Ju närmare solen den passerar, desto större blir avböjningsvinkeln. När den senare lämnar solsystemet kommer den återigen att påverkas av allt svagare (gravitations-) krafter, så dess rörelse kommer att bli allt mer rätlinjig. Man kan visa att banan är en hyperbel. Notera i synnerhet vilken fysikalisk tolkning vi här kan lägga vid det faktum, att en hyperbels strålar asymptotiskt är räta linjer.

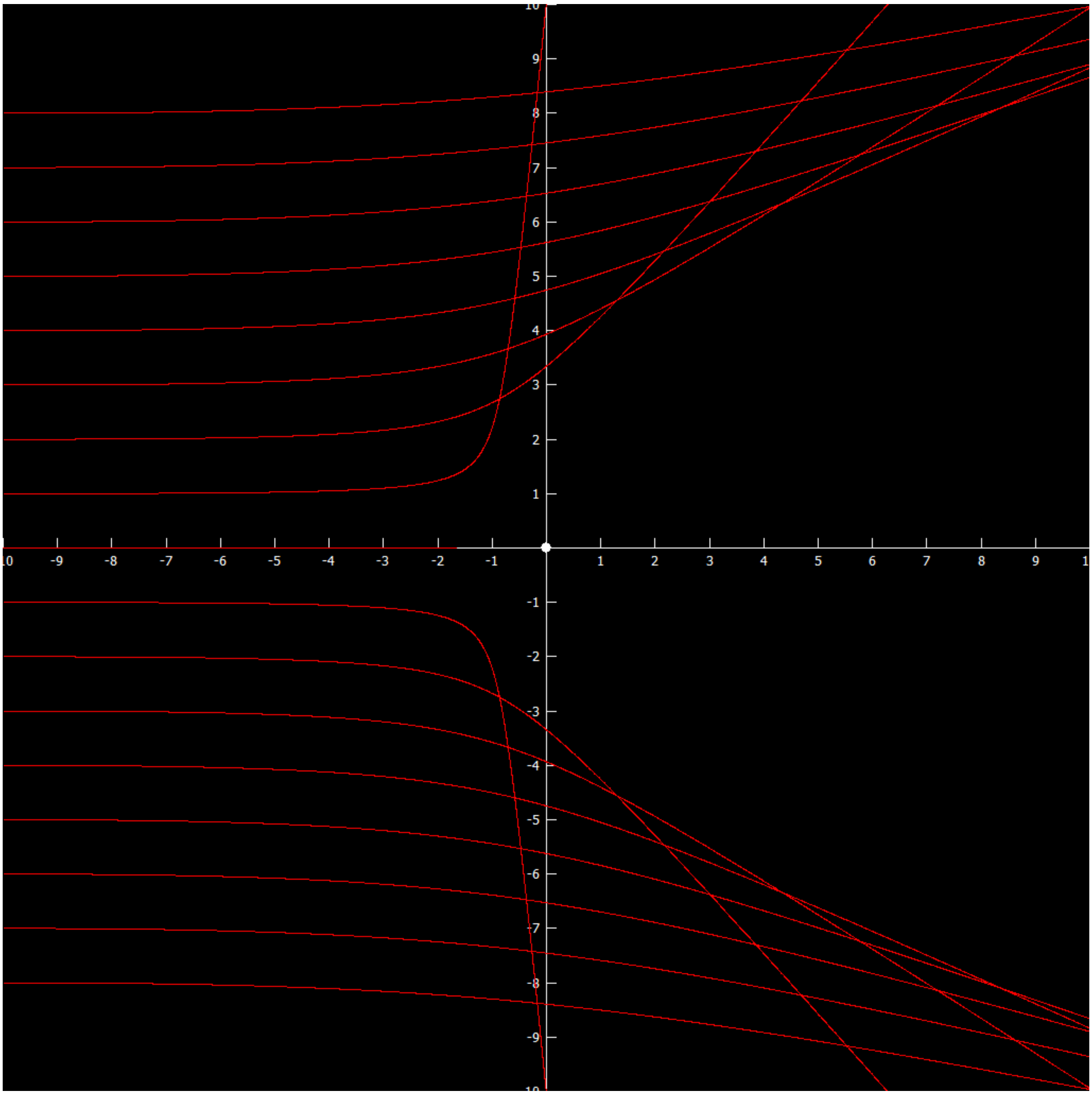
Det är inte bara gravitationskrafter som ger upphov till elliptiska och hyperboliska partikelbanor. I själva verket gör varje attraktiv ”omvänd kvadrat-kraft” upphov till dylika banor. En (attraktiv) ”omvänd kvadrat-kraft” är en (attraktiv) kraft från en fix punkt i rummet som påverkar partiklar i närheten på ett sådant sätt att kraften är parallell med den räta linjen mellan den fixa punkten och partikeln och dessutom sådan att kraftens storlek avtar som kvadraten på avståndet till den fixa punkten. Gravitationskraften är ett exempel på en (attraktiv) ”omvänd kvadrat-kraft”. Ett annat exempel är elektrostatiska krafter. Betrakta en fix (tung) positiv laddning i origo (t.ex. en guldkärna), och tänk dig att du skjuter in positiva partiklar (t.ex. alfapartiklar) mot kärnan. Alfapartiklarna kommer då känna av en *repulsiv* ”omvänd kvadrat-kraft”. De kommer alltså att böjas av i närhet av kärnan för att undvika den. Även här kan man visa att de banor partiklarna följer är hyperbler.

Faktum är att ett av fysikens mest kända experiment utfördes just så här. I början av 1900-talet var den etablerade atommodellen den så kallade ”plommonpuddingmodellen” av J. J. Thomson där en atom bestod av N stycken negativt laddade elektroner (Thomson upptäckte elektronen 1897) som simmade i en kontinuerlig, utsmetad, positiv laddningsfördelning med total laddning $N|e|$ där e är laddningen hos en enskild elektron, så att atomen totalt sett är oladdad. Begreppet ”atomkärna” var alltså inte påtänkt (i varje fall inte etablerat) ännu. Detta kom att ändras 1909 när Ernest Rutherford övervakade ett experiment av Hans Geiger och Ernest Marsden. De skickade just alfapartiklar mot en tunn guldfolie. Om plommonpuddingmodellen var korrekt borde alfapartiklarna passera folien med väldigt små avvikelser, eftersom en elektron är extremt lätt i jämförelse med en alfapartikel [kvoten mellan massorna är 7300]. Däremot fann Rutherford et al. att vissa enstaka alfapartiklar avböjdes över 90°, vilket är oförenligt med plommonpuddingmodellen. Däremot är det förenligt med en atommodell där all positiv laddning, och nästan all massa i atomen, är koncentrerad i en liten, liten

[4] Här bortser vi från de (i allmänhet mycket små) avvikelser från perfekt elliptisk rörelse som uppkommer bland annat på grund av gravitationskrafter från andra himlakroppar än den aktuella stjärnan och planeten i fråga, i synnerhet från de andra planeterna i samma planetsystem. Vi bortser även från relativistiska effekter, som också är mycket små.

atomkärna i mitten av atomen. Då skulle de alfapartiklar som frontalkolliderar med atomkärnan i princip vända 180°.

Nedan visas en högupplöst datorsimulering av experimentet. En guldkärna befinner sig i origo, och alfapartiklar skjuts in från vänster. Notera de fina hyperblerna.



Figur 1 Rutherfordspridning (datorsimulering)

4 Derivator av hyperboliska funktioner

Förkunskaper: Derivator

I det här avsnittet bestämmer vi derivatorna till de hyperboliska funktionerna.

Sats 3

För alla $x \in \mathbb{R}$ gäller

(a) $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$

(b) $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$

(c) $\frac{d}{dx}\tanh x = 1 - \tanh^2 x.$

Bevis

(a):

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

(b)–(c) lämnas som övning. ■

Notera att sinh deriveras till cosh, precis som sin deriveras till cos. Men medan cos deriveras till *minus* sin, så deriveras cosh bara till sinh.

Övningar

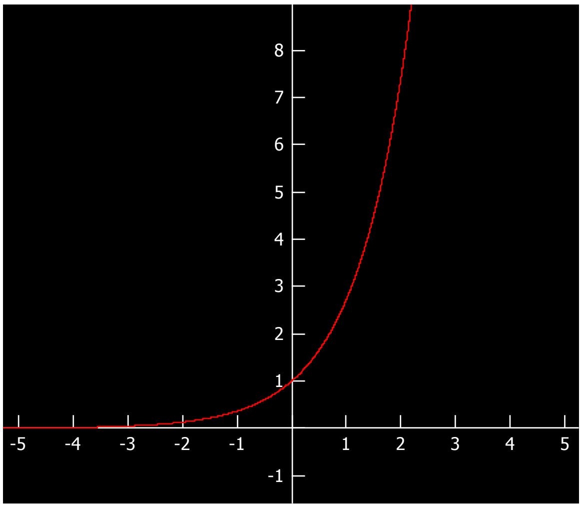
1. Visa Sats 3 (b)–(c).
2. Notera att derivatorna är rimliga genom att studera graferna till de hyperboliska funktionerna i Tabell 2.
3. Visa att $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$. Vad är motsvarande formel för de trigonometriska funktionerna?
4. Bestäm derivatorna till cotangens, sekant och cosekant hyperbolicus, där de är definierade.

5 Studie av graferna till de hyperboliska funktionerna

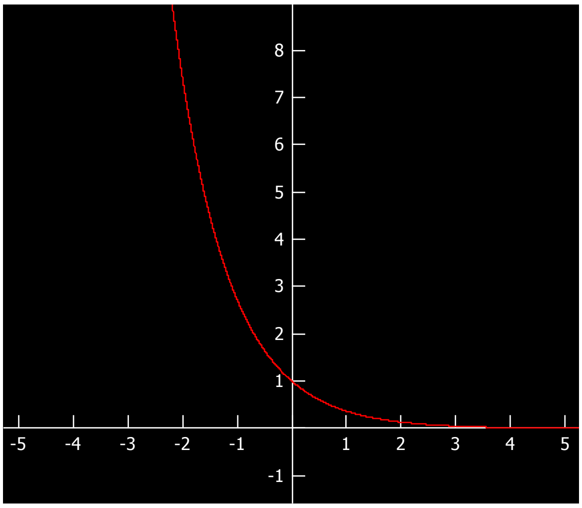
Förkunskaper: Gränsvärden, derivator, kurvritning

Vi ämnar i detta avsnitt använda envariabelanalysens maskineri för att visa centrala egenskaper hos de hyperboliska funktionerna. Bland annat motiverar vi varför graferna ser ut som de gör. Notera först att sinus och cosinus hyperbolicus bara är linjärkombinationer av de två exponentialfunktionerna e^x och e^{-x}. Vi kan alltså föreställa oss hur dessa två hyperboliska funktioner ser ut tack vare att vi är väl bekanta med graferna till dessa två exponentialfunktioner:

Tabell 3 De två exponentialfunktionerna $y = e^x$ och $y = e^{-x}$



$y = e^x$



$y = e^{-x}$

Lägg märke till att man i huvudet kan föreställa sig graferna till både cosinus och sinus hyperbolicus genom att mentalt addera (respektive subtrahera) de två exponentialfunktionerna (och dela med två). Lägg sedan märke till att de övriga hyperboliska funktionerna definieras som enkla funktioner av sinh och cosh, och att man därför även kan föreställa sig deras grafer så fort man lärt sig graferna till sinh och cosh. Till exempel, notera att det av definitionerna av sinus och cosinus hyperbolicus följer att

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \pm 1$$

vilket återspeglas i grafen till tangens (och cotangens) hyperbolicus. Vi betraktar nu graferna mer i detalj, och vi börjar med cosinus hyperbolicus.

Sats 4

(a) cosh är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$

(b) cosh är positiv, d.v.s. $\cosh x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(c) cosh är jämn

(d) cosh är strängt växande på $x \geq 0$

(e) $\cosh(0) = 1$

(f) $\cosh(x) \to \infty$ när $x \to \infty$.

Bevis

(a) följer direkt av definitionen. (b): $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ eftersom båda termerna i täljaren är positiva på hela $\mathbb{R}$.

(c):

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

(d):

$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x > 0$ för alla $x > 0$ eftersom $\sinh(0) = \frac{e^0-e^{-0}}{2} = 0$ och $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x > 0$ för alla x enligt (b). Alltså är $\frac{d}{dx}\cosh x > 0$ för alla $x > 0$ varför $\cosh x$ strängt växande på hela $[0, \infty[$.

(e):

$$\cosh 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

(f):

$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \to \infty$ då $x \to \infty$ eftersom $e^x \to \infty$ medan $e^{-x} \to 0$. ■

Vi har nu allt som krävs för att skissa grafen till cosinus hyperbolicus. Vi erhåller då precis grafen i Tabell 2. Notera i synnerhet att det följer omedelbart av Sats 4 att $\cosh x$ har ett globalt minimum i origo, samt att $\cosh(x) \to \infty$ även då $x \to -\infty$. När det gäller sinus hyperbolicus har vi

Sats 5

(a) sinh är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$

(b) sinh är udda

(c) sinh är strängt växande på hela $\mathbb{R}$

(d) $\sinh x \to \infty$ när $x \to \infty$.

Notera här att det följer att $\sinh x \to -\infty$ även då $x \to -\infty$. Beviset lämnas som övning. Vi tittar nu på tangens hyperbolicus.

Sats 6

(a) tanh är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$

(b) tanh är udda

(c) tanh är strängt växande

(d) $\tanh x \to 1$ när $x \to \infty$

(e) tanh är begränsad; närmare bestämt är $-1 < \tanh x < 1$ för alla x.

Bevis

(a) följer av definitionen $\tanh x = \sinh x / \cosh x$ eftersom både sinh och cosh är definierade och kontinuerliga på hela $\mathbb{R}$ och $\cosh x > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. (b) följer också direkt ty $\tanh x$ är kvoten mellan en udda och en jämn funktion. (c) följer av att $\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

(d):

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - \frac{e^{-x}}{e^x}}{1 + \frac{e^{-x}}{e^x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \to 1$$

då $x \to \infty$ eftersom $e^{-2x} \to 0$.

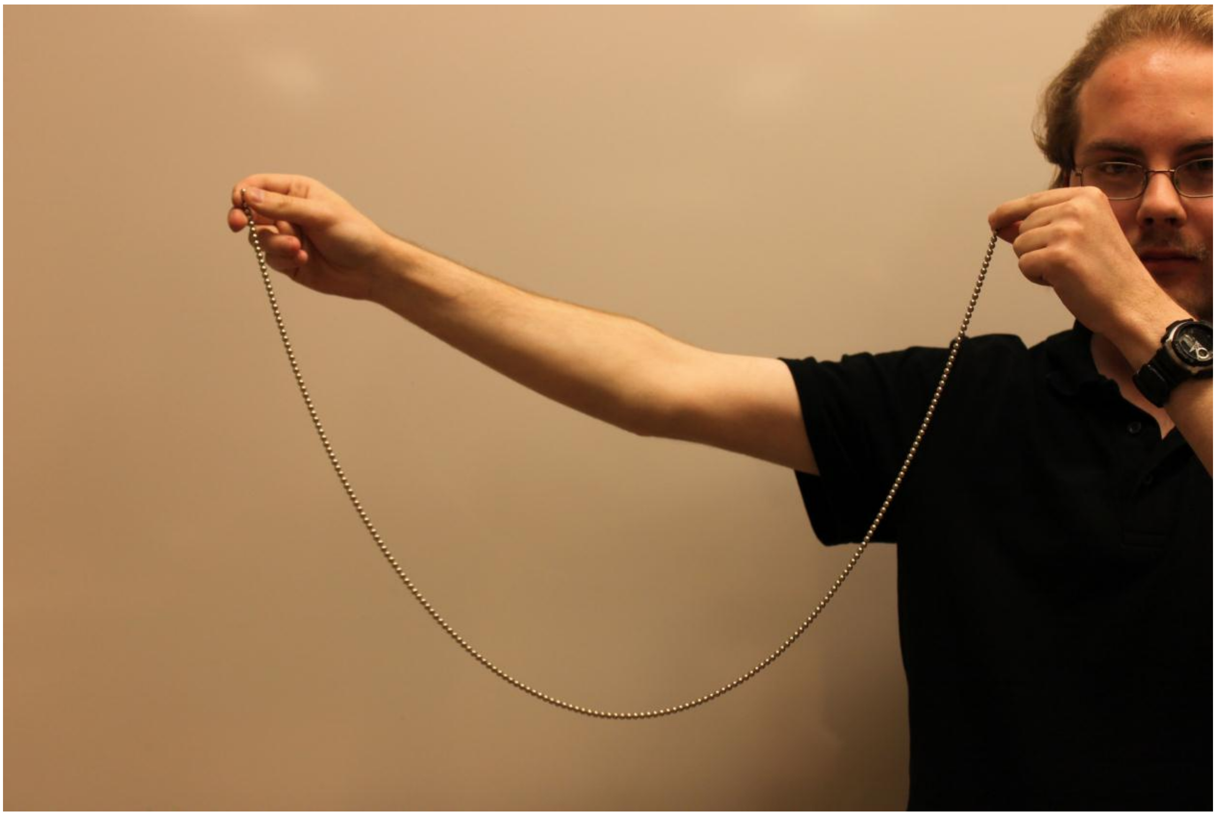
(e) följer av (a), (b), (c) och (d). ■

Övningar

1. Visa att $\cosh x$ har ett lokalt minimum i origo på naivt sätt, d.v.s. genom att sätta derivatan till noll och undersöka derivatans teckenväxling. Förklara också hur man kan se att den stationära punkten i origo är just ett minimum genom att studera andraderivatan till cosh i stället för att undersöka förstaderivatans teckenväxling explicit.
2. Bevisa Sats 5.
3. Motivera grafernas utseende för de tre återstående hyperboliska funktionerna, d.v.s. för cotangens, sekant och cosekant hyperbolicus, bara genom att utgå från graferna till cosinus och sinus hyperbolicus.
4. ($\star$) Visa stringent att de räta linjerna $y = \pm x$ verkligen är sneda asymptoter till hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$.

5.1 Kedjekurvan

Grafen till cosinus hyperbolicus stöter du förmodligen på så gott som dagligen. En ideal kedja (tvättlina, snöre, elkabel, metallkedja, …) som är uppsatt i sina två ändpunkter (på samma höjd) och som endast påverkas av tyngdkraften[5] antar nämligen formen av $y = \cosh x$ i ett lämpligt (kartesiskt) koordinatsystem.

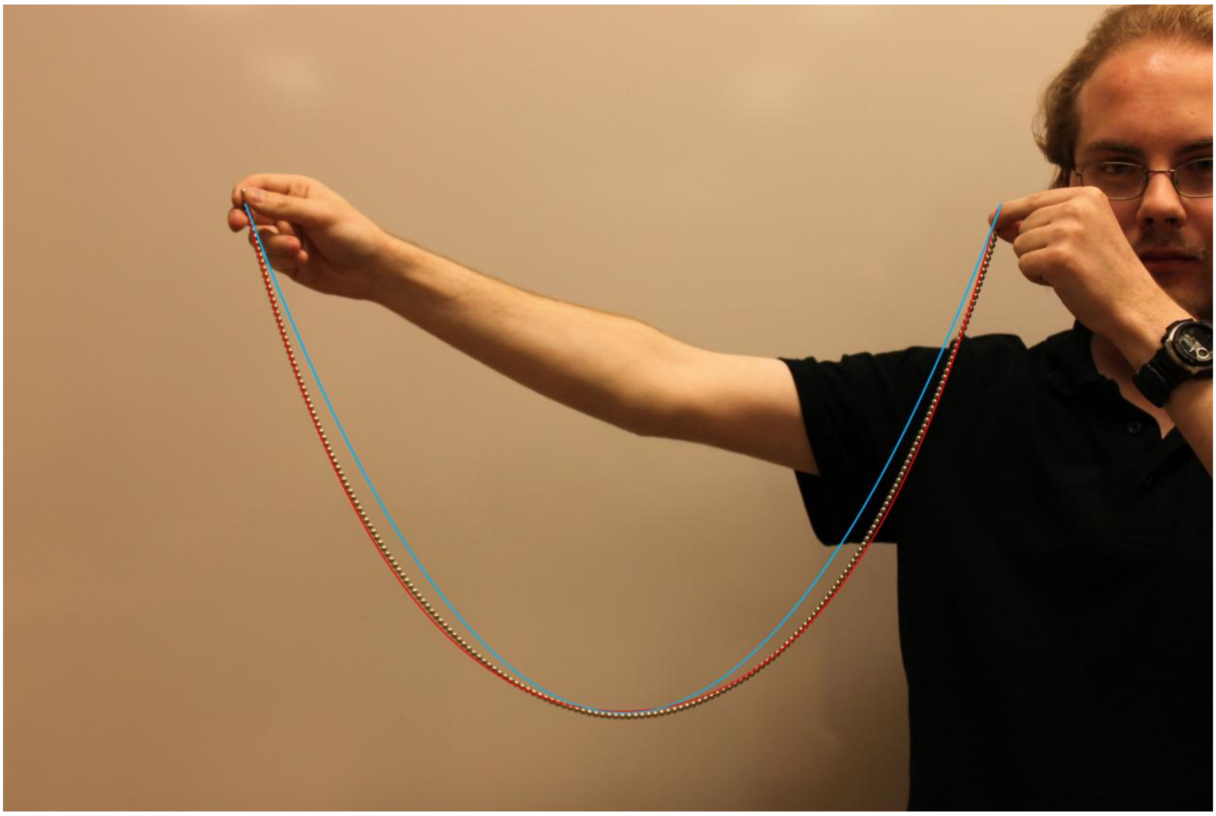


Figur 2 Ett fotografi av en kedja som hänger fritt

Det sägs[6] ibland att Galileo Galilei (1564-1642) trodde att kedjekurvor var parabler ($y = x^2$) [vilket de alltså inte är]. Det verkar emellertid vara närmare sanningen att han enkom betraktade parabeln som en god approximation till kedjekurvan, vilket den också är. I bilden nedan lägger vi in en cosinus hyperbolicus-graf (röd) och en parabel (blå) ovan den riktiga kedjan. Trots att fotografiet är taget lite snett och vint och att kedjan inte är ideal, och dessutom påverkas av andra krafter än gravitationen (den till och med gungar något), ser vi att den passar väldigt fint mot cosh-grafen.

[5] Det går förstås bra med vilket konstant kraftfält som helst.

[6] Wikipediabidragsgivare, "Catenary", *Wikipedia, The Free Encyclopedia,* http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Catenary&oldid=427545117 (hämtat den 27 maj 2011).



Figur 3 Samma kedja med en cosh-graf (röd) och en parabel (blå) överlagrade

6 Inversa hyperboliska funktioner

Vi ämnar här bestämma inverserna till de hyperboliska funktionerna. En snabb inspektion av graferna till de hyperboliska funktionerna (se Tabell 2) visar att sinus, tangens, cotangens och cosekant hyperbolicus är injektiva (d.v.s. har invers). Cosinus och sekant hyperbolicus, däremot, saknar invers, så här måste vi införa injektiva restriktioner på samma sätt som vi gjorde med de trigonometriska funktionerna. Vi tar sedan fram inverserna för dessa restriktioner. I vilket fall som helst talar vi sedan om de sex *inversa hyperboliska funktionerna*, precis som vi talar om de sex inversa trigonometriska funktionerna. Vi betecknar inverserna arccosh, arcsinh, arctanh, … Notera att suffixet ”-h” talar om för oss att det är en *hyperbolisk* funktion, och alltså inte en trigonometrisk, och att prefixet ”arc-”, som här inte alls har något med bågar att göra, bara talar om för oss att det rör sig om en *invers* hyperbolisk funktion. Det är alltså bara av konvention vi använder prefixet ”arc-” för att beteckna ”invers”. Den direkta tolkningen som en båglängd försvann när vi lämnade arcsin och arccos bakom oss. Många författare förespråkar i stället prefixet ”ar-” för invers hyperbolisk funktion; se övningsuppgift 5 nedan.

Eftersom de hyperboliska funktionerna definieras med hjälp av elementära funktioner är det inte konstigt att vi kan ta fram explicita uttryck för deras inverser. Låt oss börja med att ta fram inversen till sinus hyperbolicus (som alltså är injektiv). Antag så att $y = \sinh x$. Vi vill då finna ett uttryck för x som en funktion av y. Eftersom $V_{\sinh} = \mathbb{R}$ kommer inversen att ha definitionsmängden $D_{\operatorname{arcsinh}} = \mathbb{R}$. Vi finner först

$$\begin{aligned} y = \sinh x \Rightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow 2y = e^x - e^{-x} \Rightarrow [\text{Sätt } t \coloneqq e^x] \Rightarrow 2y = t - \frac{1}{t} \Rightarrow 2yt = t^2 - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow t^2 - 2yt = 1 \Rightarrow (t-y)^2 - y^2 = 1 \Rightarrow (t-y)^2 = y^2 + 1 \Rightarrow t - y = \\ = \pm\sqrt{y^2+1} \Rightarrow t = e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}. \end{aligned}$$

Eftersom $e^x > 0$ så måste[7] $t = y + \sqrt{y^2+1}$, så att

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

varför vi funnit inversen

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Låt oss nu betrakta hyperboliska cosinus. $V_{\cosh} = [1, \infty[$. Antag att $y = \cosh x$. Om $y = 1$ måste $x = 0$. Men för varje $y > 1$ finns det exakt två tal x sådana att $y = \cosh x$. Cosinus hyperbolicus är alltså inte injektiv, utan vi måste bestämma en injektiv restriktion f med samma värdemängd $[1, \infty[$. Det naturliga valet är $f(x) = \cosh x$ med $D_f = [0, \infty[\subset \mathbb{R} = D_{\cosh}$. [Positiva tal är trevligare än negativa. Notera t.ex. att ”kvadratrotsfunktionen” $x \mapsto \sqrt{x}$ är inversen till restriktionen av $x \mapsto x^2$ till $[0, \infty[$.] Vi finner då

$$\begin{aligned} y = \cosh x \Rightarrow y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow 2y = e^x + e^{-x} \Rightarrow [\text{Sätt } t \coloneqq e^x] \Rightarrow 2y = t + \frac{1}{t} \Rightarrow 2yt = t^2 + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow t^2 - 2yt = -1 \Rightarrow (t-y)^2 - y^2 = -1 \Rightarrow (t-y)^2 = y^2 - 1 \Rightarrow t - y = \\ = \pm\sqrt{y^2-1} \Rightarrow t = e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}. \end{aligned}$$

Nu är båda tecknen rimliga [kom ihåg att $y \geq 1$]. Däremot har vi ju bestämt oss för konventionen $x \geq 0$, d.v.s. $e^x \geq 1$, varför vi måste[8] förkasta minustecknet, så att

[7] Lägg märke till att $y - \sqrt{y^2+1} < 0, \forall y \in \mathbb{R}$.

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

och den sökta inversen är

$$\operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \qquad \forall x \geq 1.$$

Övningar

1. Tag fram ett explicit uttryck för arctanh, d.v.s. inversen till tangens hyperbolicus, och ange inversens definitions- och värdemängd.
2. (⋆) Tag fram ett explicit uttryck för arccoth och ange definitions- och värdemängd till funktionen.
3. (⋆) Tag fram ett explicit uttryck för arcsech, som definieras som inversen till restriktionen av sech till $x \geq 0$, samt ange definitions- och värdemängd.
4. (⋆) Tag fram ett explicit uttryck för arccsch samt ange definitions- och värdemängd.
5. (⋆⋆) Betrakta ”enhetshyperbeln” $x^2 - y^2 = 1$. Låt (x_0, y_0) vara en godtycklig punkt på hyperbeln i första kvadranten, svarande mot parametervärdet $t > 0$ i parametriseringen $(x_0, y_0) = (\cosh t, \sinh t)$. Betrakta nu det område i första kvadranten som begränsas av x-axeln, den räta linjen som går genom origo och punkten (x_0, y_0) samt hyperbeln själv. Låt arean vara A. Visa att $A = \frac{t}{2}$. Argumenten till sinus och cosinus hyperbolicus (eller, ekvivalent, funktionsvärdena för inverserna) kan alltså tolkas som areor!
6. (⋆⋆) Använd resultatet i föregående uppgift för att *definiera* de hyperboliska funktionerna sinh och cosh med hjälp av enhetshyperbeln på ett sätt som i så stor utsträckning som möjligt liknar det sätt på vilket sin och cos definieras med hjälp av enhetscirkeln.
7. (⋆⋆) Använd dina nya definitioner av sinh och cosh för att *bevisa* att $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ och $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

6.1 Derivator av inversa hyperboliska funktioner

Vi bestämmer derivatorna av de vanligaste inversa hyperboliska funktionerna.

Sats 7

(a) $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ för alla $x \in \mathbb{R}$

(b) $\frac{d}{dx} \operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ för alla $x > 1$

(c) $\frac{d}{dx} \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2}$ för alla $x \in \,]-1, 1[$.

---

[8] Notera att $y - \sqrt{y^2 - 1} = \frac{\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)}{y+\sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}} < 1, \forall y > 1.$

Bevis

(a):

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} x = \frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right) =$$

$$= \frac{1+x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(b)–(c) lämnas som övning. ■

Övningar

1. Jämför derivatorna av de inversa hyperboliska funktionerna i Sats 4 med derivatorna av de inversa trigonometriska funktionerna arcsin, arccos och arctan.
2. Visa Sats 7 (b)–(c).
3. (⋆) Bestäm derivatorna till de tre återstående inversa hyperboliska funktionerna, d.v.s. till arccoth, arcsech och arccsch.

7 Tillämpningar av hyperboliska funktioner

Förkunskaper: Integration, differentialekvationer

Vi har redan stött på flera exempel där hyperboliska funktioner är av stor vikt. Det första exemplet rör det faktum att *hyperbler* är av stor vikt (och därmed hyperboliska funktioner som parametriserar dessa). Senare såg vi att cosinus hyperbolicus gör sig påmind nästan överallt i naturen och samhället. Här skall vi studera några andra faktorer som gör att de hyperboliska funktionerna är av stor vikt.

7.1 Integration

De vanliga trigonometriska funktionerna är väldigt viktiga vid integration. Till exempel vet vi ju att

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C.$$

I synnerhet arctan spelar en stor roll vid integration av rationella uttryck. Vi har ju ett ”standardrecept” för att integrera alla rationella funktioner, och resultatet blir i allmänhet en summa av flera termer: dessa är rationella funktioner, logaritmer och arcustangenter. Integrander som innehåller rotuttryck är något besvärligare. Om det som står innanför rottecknet är ett förstagradspolynom kan vi ofta få bort rottecknet med ett variabelbyte. Vad som är något värre är om rotuttrycket innehåller ett andragradspolynom. Två av de vanligaste fallen är

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \text{och} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

Den första integralen vållar inga problem, eftersom det är en vanlig arcsin. Den andra, däremot, är ett bekymmer. I inledande läroböcker i analys listas ofta den senare i tabellen över primitiva funktioner lite som en enstöring – den kommer oftast sist i tabellen, och till skillnad från de övriga primitiva funktionerna ($\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, e^x, $-\cos x$, $\sin x$, $\arctan x$, $\arcsin x$, …) är den inte på något sätt uppenbar:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

[Hur skulle man komma på det?!] ”Problemet” är att dessa läroböcker inte lägger någon större vikt på de hyperboliska funktionerna! Högerledet är ju precis inversen till sinus hyperbolicus (plus en konstant)! Notera den vackra symmetrin:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arcsinh} x + C.$$

Övningar

1. Förklara varför den inversa hyperboliska tangenten (arctanh) inte underlättar nämnvärt mycket vid integration av $\frac{1}{1-x^2}$.

2. Underlättar arccosh vid integration av $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$?
3. ($\star$) Standardvariabelbytet $y = x + \sqrt{x^2 \pm 1}$ för integrander som innehåller $\sqrt{x^2 \pm 1}$ (på valfritt ställe) kan också skrivas om för att använda hyperboliska funktioner. Gör det!

7.2 Differentialekvationer

Fysikaliska problem beskrivs ofta av differentialekvationer. Därför är funktioner som dyker upp som lösningar till vanliga differentialekvationer viktiga. Dessa inkluderar exponentialfunktioner och trigonometriska funktioner. Till exempel vet vi att

$$y' = ky \Rightarrow y(x) = Ae^{kx}$$

medan

$$y'' + k^2 y = 0 \Rightarrow y(x) = A\cos kx + B\sin kx.$$

Vi har som bekant ett standardrecept för att ta fram den allmänna lösningen till en godtycklig linjär ordinär differentialekvation av n:te ordningen med konstanta koefficienter, och de två exemplen ovan är bara specialfall av detta förfarande. Detta recept säger egentligen att lösningen till $y'' + k^2 y = 0$ är $A'e^{ikx} + B'e^{-ikx}$ för godtyckliga konstanter $A', B' \in \mathbb{C}$ men med hjälp av definitionen av den komplexa exponentialfunktionen kan lösningen lika gärna skrivas $A\cos kx + B\sin kx$ där $A = A' + B'$ och $B = (A' - B')i$. För varje lösning (A, B) svarar precis en lösning (A', B') och omvänt. Fördelen med formen $A\cos kx + B\sin kx$ är förstås att vi här direkt kan identifiera de reella lösningarna (välj helt enkelt $A, B \in \mathbb{R}$).

Låt oss byta ut ett tecken: Ekvationen

$$y'' - k^2 y = 0$$

har enligt standardreceptet lösningarna

$$y(x) = A'e^{kx} + B'e^{-kx}.$$

Men

$$A'e^{kx} + B'e^{-kx} = A'(\cosh kx + \sinh kx) + B'(\cosh kx - \sinh kx) = A\cosh kx + B\sinh x$$

där

$$\begin{cases} A = A' + B' \\ A = A' - B'. \end{cases}$$

Notera att ”variabelbytet” ovan är en bijektion (rent av en linjär avbildning med determinant -2 i planet), så till varje lösning (A', B') hör precis en lösning (A, B) och tvärtom. Vi kan alltså lika gärna skriva lösningarna till differentialekvationen $y'' - k^2 y = 0$ med hyperboliska funktioner.

Notera den vackra symmetrin:

$$\begin{aligned} y'' + k^2 y = 0 &\Rightarrow y(x) = A\cos kx + B\sin kx \\ y'' - k^2 y = 0 &\Rightarrow y(x) = A\cosh kx + B\sinh x. \end{aligned}$$

Läsaren har nog redan noterat att den här användningen av hyperboliska funktioner främst tjänar ett estetiskt syfte. Även om $A\cosh kx + B\sinh kx$ ser sött ut så går det ju i princip lika bra att räkna med $A'e^{kx} + B'e^{-kx}$. Estetik skall emellertid inte underskattas – vackra formler är ofta lättare att hantera.

7.3 Tillämpad matematik

De hyperboliska funktionerna och deras inverser dyker ofta upp i tillämpad matematik. Titt som tätt i fysik, kemi och biologi dyker de upp, och detta utgör förstås en stor motivation till att bekanta sig med dem.

8 Maclaurinserier

Förkunskaper: Maclaurinserier, potensserier

I det här avsnittet undersöker vi Maclaurinserierna för de viktigaste hyperboliska funktionerna.

Sats 8

(a) $\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$

(b) $\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$

(c) $\operatorname{arctanh} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots$

Bevis

(a), (b): Eftersom

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

och

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

så är

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

och

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots.$$

(c): Eftersom

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$$

där

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$$

och

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \cdots$$

så är

$$\operatorname{arctanh} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots.$$

■

Notera att serierna skiljer sig från de vanliga trigonometriska serierna endast genom att varje minustecken är utbytt mot ett plustecken. Här framgår också att sinh och cosh är varandras derivator, att cosh är jämn medan sinh och arctanh är udda, och att $\cosh x + \sinh x = e^x$.

Korollarium 9

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x} = 1.$$

Bevis

$$\frac{\sinh x}{x} = \frac{x + O(x^3)}{x} = 1 + O(x^2) \to 1$$

då $x \to 0$. ■

Det är förstås lönlöst att försöka ta fram Maclaurinutvecklingar av cotangens och cosekant hyperbolicus. Och precis som i det trigonometriska fallet är det ”bökigt” att ta fram utvecklingarna av tangens och sekanten. Men precis som i det trigonometriska fallet kan man ”trixa fram” utvecklingen för tangenten t.ex. genom att utgå från $\operatorname{arctanh}\tanh x = x$ och göra en ansats med lämplig paritet (jämn/udda).

Övningar

1. Bestäm konvergensradien för potensserierna i Sats 8.
2. Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning tre för tanh. Jämför resultatet med motsvarande utveckling för tan.
3. (⋆) Bestäm på något sätt Maclaurinutvecklingen av ordning två för sekant hyperbolicus. Jämför med utvecklingen för sec.
4. (⋆) I de inledande kurserna på högskolenivå definieras vanligtvis inte de trigonometriska (eller de hyperboliska) funktionerna för icke-reella tal. Notera emellertid att, *rent formellt*, gäller $\sinh ix = i\sin x$, $\cosh ix = \cos x$, $\sin ix = i\sinh x$ och $\cos ix = \cosh x$. Använd detta för att *rent formellt* ta fram Maclaurinutvecklingarna för de hyperboliska funktionerna genom att utgå från de trigonometriska utvecklingarna.

9 Facit

2.2.1 $\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{\cos x + i\sin x + \cos(-x) + i\sin(-x)}{2} = \frac{\cos x + i\sin x + \cos x - i\sin x}{2} = \cos x$

$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{\cos x + i\sin x - (\cos(-x) + i\sin(-x))}{2i} = \frac{\cos x + i\sin x - \cos x + i\sin x}{2i} = \sin x$

2.3.4 tanh, coth och csch är udda. sech är jämn.

3.1.1 $x = \pm a$ då $y = 0$, d.s.v. a är avståndet mellan hyperbeln och y-axeln.

3.1.2 Hyperbelns strålar närmar sig asymptotiskt de räta linjerna $y = \pm\frac{b}{a}x$.

3.1.3 $(x, y) = (a\cosh t, b\sinh t)$

3.1.4 Den har exakt samma form som en hyperbel på formen $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$; det är bara fråga om hur den är vriden i förhållande till koordinatsystemet, och det påverkar inte vad en figur heter. För att se detta, utför ett linjärt basbyte; byt från standardbasen $\underline{\mathbf{e}}$ till den nya basen $\underline{\mathbf{f}}$ med hjälp av basbytesmatrisen $T = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Låt $P = \underline{\mathbf{e}}X_e = \underline{\mathbf{f}}X_f$ vara en godtycklig punkt i planet. Då är $X_e = TX_f$. Antag nu att P är en godtycklig punkt på hyperbeln $y = \frac{1}{x}$ där $X_e = (x \quad y)^T$ är koordinatmatrisen relativt basen $\underline{\mathbf{e}}$. $X_e = TX_f \Leftrightarrow (x \quad y)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y' \quad x' + y')^T$ så att $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') = \frac{\sqrt{2}}{x' - y'} \Leftrightarrow x'^2 - y'^2 = 2$ som ju är en hyperbel på standardformen $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ med $a = b = \sqrt{2}$.

3.1.5 Ja, eftersom den har exakt samma form som hyperbeln $y = \frac{1}{x}$; det är bara en isometri som skiljer dem åt (vilken?).

4.0.3 $1 - \tanh^2 x = 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$. Den trigonometriska formeln är $(\frac{d}{dx}\tan x =) 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ som visas på precis samma sätt men med hjälp av den trigonometriska ettan.

4.0.4 $\frac{d}{dx}\coth x = 1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$, $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\frac{\sinh x}{\cosh^2 x}$ och $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\frac{\cosh x}{\sinh^2 x}$.

6.0.1 $\operatorname{arctanh} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $D_{\text{arctanh}} =]-1, 1[$, $V_{\text{arctanh}} = \mathbb{R}$

6.0.2 $\operatorname{arccoth} x = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $D_{\text{arccoth}} = \mathbb{R} \setminus [-1,1]$, $V_{\text{arccoth}} = \mathbb{R}$

6.0.3 $\operatorname{arcsech} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$, $D_{\text{arcsech}} =]0,1]$, $V_{\text{arcsech}} = [0, \infty[$

6.0.4 $\operatorname{arccsch} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right)$, $D_{\text{arccsch}} = V_{\text{arccsch}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

6.0.6 Betrakta enhetshyperbeln $x^2 - y^2 = 1$. Välj ett tal $t > 0$ och drag en rät linje från origo till den punkt (x_0, y_0) på hyperbeln i första kvadranten som gör att arean som begränsas av x-axeln, den räta linjen och enhetshyperbeln är lika med $A = 2t > 0$. Då definieras $\cosh t \coloneqq x_0$ och $\sinh t \coloneqq y_0$. Definiera sedan $\cosh 0 = 1$ och $\sinh 0 = 0$. Slutligen, för $t < 0$, definiera $\cosh t = \cosh|t|$ och $\sinh t = -\sinh|t|$.

6.1.3 $\frac{d}{dx}\operatorname{arccoth} x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{1-x^2}$, $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsech} x = \frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$,
$\frac{d}{dx}\operatorname{arccsch} x = \frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$

7.1.1 $\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{dx}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)dx = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C$

7.1.2 Ja, det är svårt att se något enkelt alternativ, så arccosh har vi nytta av, precis som arcsinh. Däremot har vi ju ingen större nytta av arccos eftersom derivatan av arccos ser likadan ut som derivatan av arcsin så när som på tecknet.

7.1.3 $y = e^{\arcsin x}$ respektive $y = e^{\arccos x}$

8.0.1 ∞, ∞ respektive 1

8.0.2 $\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$. Jämför med $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$.

8.0.3 $\operatorname{sech} x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$. Jämför med $\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$.