Härledning av funktionen $n \mapsto E$ inom Bohrs atommodell

Vi betraktar en väteliknande atom, d.v.s. en atom med den allmänna kärnladdningen Z men bara en elektron.

Den elektriska kraften på elektronen i cirkelbana runt kärnan är lika med centripetalkraften:

$$F = k\frac{Ze^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \tag{1}$$

där konstanten i Coulombs lag

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \tag{2}$$

Vi ser att vi av (1) kan skriva en funktion $r \mapsto v$ (som vi snart behöver) enligt

$$v = \sqrt{\frac{kZe^2}{mr}}. \tag{3}$$

Postulat: rörelsemängdsmomentet är kvantiserat enligt

$$L = mvr = n\hbar \tag{4}$$

där $n \in \mathbb{Z}^+$. Vi kan nu med hjälp av (3) och (4) finna en funktion $n \mapsto r$:

$$r = \frac{\hbar^2}{mke^2}\frac{n^2}{Z} = a_0\frac{n^2}{Z} \tag{5}$$

där Bohrradien

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2}. \tag{6}$$

Förlängning av (1) med faktorn $r/2$ ger den kinetiska energin hos elektronen:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{kZe^2}{2r} \tag{7}$$

Den potentiella energin är vidare

$$E_{pot} = -\frac{kZe^2}{r} \tag{8}$$

varför totalenergin är

$$E = E_k + E_{tot} = -\frac{kZe^2}{2r} \tag{9}$$

och vi har funnit en funktion $r \mapsto E$.

Funktionerna $n \mapsto r$ (5) och $r \mapsto E$ (9) ger nu vår funktion $n \mapsto E$:

$$E = -\frac{k^2me^4}{2\hbar^2}\frac{Z^2}{n^2} = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^2}\frac{Z^2}{n^2} \qquad \blacksquare$$

Även om uttrycket (4) för L inte helt stämmer överrens med verkligheten, så gör faktiskt uttrycket för E det. Även uttrycket för r kan visas vara tämligen lämpligt.